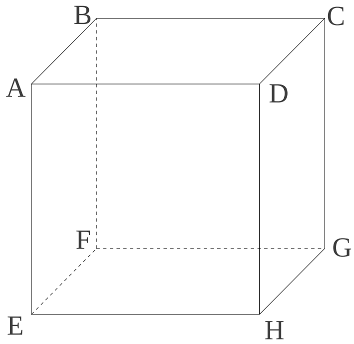
Géométrie dans l'espace, Partie I	2nde

Partie I : Perspective cavalière, constructions, calculs de distances d'angles et de volumes.
Partie II : Positions relatives de droites et plans de l'espace.

I. Perspective cavalière

La perspective cavalière permet de représenter en deux dimensions (sur une feuille de papier, un tableau) des objets en trois dimensions (cube, tétraèdre...)

Exemple 1. Voici la représentation en perspective cavalière d'un cube ABCDEFGH. Les six faces sont donc des carrés.



Essayons de mettre en évidence les règles utilisées.

On observe que :

- les faces de devant et de derrière qui sont vues de face sont représentées en vraie grandeur par des carrés.
- La face ABCD du cube est aussi un carré, pourtant sa représentation en perspective cavalière a la forme d'un . . . . qui n'est pas un carré.
- Les arêtes [BC] et [CD] ont même longueur sur le cube *(indiquez-le sur la figure par un codage adéquat)* mais on les a représentées par des segments de longueurs différentes.
- L'angle $\widehat{DCG}$ est droit sur le cube *(indiquez-le sur la figure par un codage adéquat)* mais est représenté par un angle . . . . *(droit ? aigu ? obtus?)* sur la figure. L'angle $\widehat{CDA}$ est droit sur le cube mais est représenté par un angle . . . . *(droit ? aigu ? obtus?)* sur la figure.

► Il faut donc bien distinguer le cube et sa représentation, la réalité et ce qu'on voit sur la figure.

Pour faire ou interpréter correctement une représentation en perspective cavalière il faut respecter un certain nombre de règles.

Les règles de la perspective cavalière :

R1. Les arêtes cachées sont représentées en pointillés.

R2. Des segments parallèles dans la réalité sont représentés par des segments parallèles (pas de point de fuite!).

R3. Les alignements et les rapports de longueurs entre points alignés doivent être conservés.

R4. Seuls les objets représentés dans un plan vu de face (***plan frontal***) sont en vraie grandeur et non déformés.

- La règle 1 nous permet de distinguer les parties qui se trouvent au premier plan.
- La règle 2 explique pourquoi les faces carrées du cube qui ne sont pas vues de face sont représentées par des parallélogrammes.
- La règle 3 dit que des droites qui se coupent dans la réalité sont toujours représentées par des droites qui se coupent sur le dessin en perspective cavalière.
- La règle 3 implique que le milieu d'un segment se trouve aussi au milieu sur la représentation.
- La règle 4 explique pourquoi un angle droit ne semble pas forcément droit sur le dessin : Cela se produit s'il n'est pas vu de face.
- La règle 4 explique pourquoi une arête du cube « qui part vers le fond » n'est pas représentée de la même longueur qu'une arête du cube vue de face qui, elle, est en vraie grandeur.

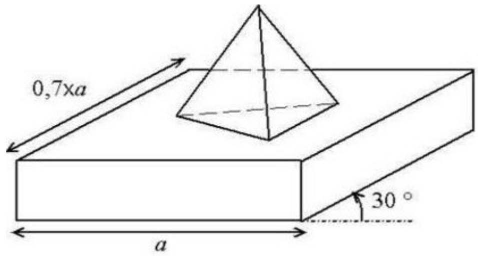
Attention! Des droites qui se coupent dans la réalité sont toujours représentées par des droites qui se coupent sur le dessin en perspective cavalière mais par contre, on peut avoir des traits qui se croisent sur le dessin en perspective cavalière sans que les droites ainsi représentées ne se coupent dans la réalité.

Exemple 2. *Par exemple, les traits qui représentent les droites . . . . et . . . . . . se croisent sur le dessin en perspective cavalière et pourtant ces droites ne se coupent dans la réalité.*

Pour un dessin plus formalisé, on impose parfois l'angle de fuite et le coefficient de perspective :

R5. Les droites perpendiculaires au plan frontal sont appelées des *fuyantes*. Elles sont représentées par des droites parallèles entre elles formant un angle donné avec l'horizontale appelé ***angle de fuite*** (généralement entre 30º et 60º et souvent noté α.).

R6. Les longueurs représentées dans la direction des fuyantes sont multipliées par un ***coefficient de perspective*** (généralement 0,5 ou 0,7 et souvent noté k).



Exemple avec $\alpha = 30$ ° et k=0,7

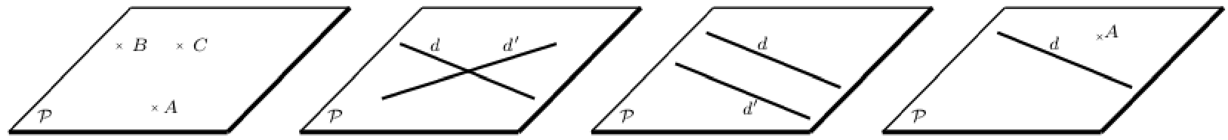
◯ Exercice 6 p 230, 7 et 8 p 231 du manuel Repère.

II. Droites et plans de l'espace

Caractérisations des droites et des plans de l'espace.

P7. Une ***droite*** est définie par deux points distincts.

P8. Il existe un unique ***plan*** contenant



(a) trois points non alignés **(b)** deux droites sécantes **(c)** deux parallèles strictes **(d)** une droite et un point extérieur

Utilisations des caractérisations ci-dessus :

- *Ces caractérisations des plans permet parfois de se ramener dans un plan et d'utiliser alors la géométrie plane.*
- *Point-méthode : Pour que des droites qui se coupent sur le dessin en perspective cavalière se coupent dans la réalité, il faut et il suffit qu'elles soient coplanaires, càd contenues dans le même plan.*

◯ Exercice 3. Montrer que les diagonales [AG] et [EC] du cube ABCDEFGH sont sécantes.

Propriété 9. Dans chaque plan de l'espace, tous les théorèmes de géométrie plane s'appliquent : Pythagore, Thalès, trigonométrie (*Vous n'avez pas jeté mon beau formulaire de géométrie plane j'espère?*).

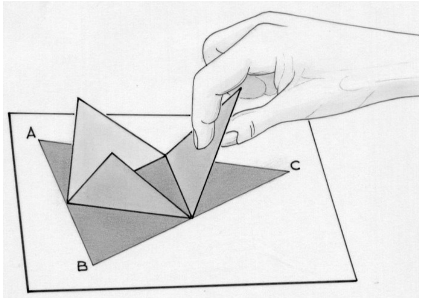
Point-méthode : Il est souvent utile de dessiner ce qui se passe dans un plan pour mieux comprendre la situation.

◯ Exercice 4. Calculer la longueur des diagonales [AG] et [EC] d'un cube ABCDEFGH de côté a .

◯ Exercice 5. ABCDEFGH est un cube. Quelle est la nature du triangle BDE ?

III. Solides de l'espace

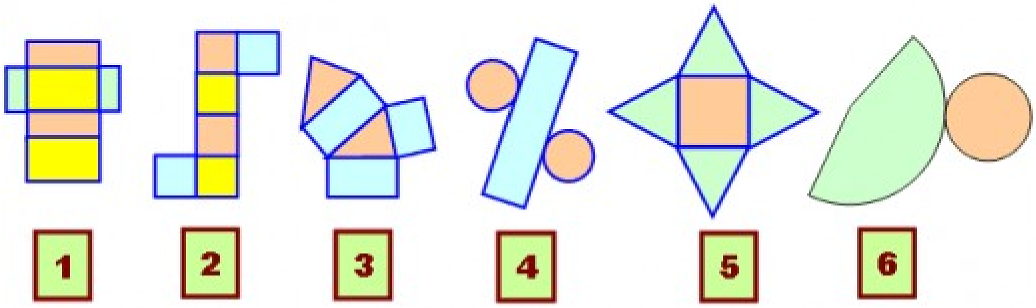
A. Patron d'un solide



Définition 10. Un ***patron d'un solide*** est une surface plane qui, après pliage, permet de fabriquer ce solide sans superposition de faces.

Remarques :
- Un même solide peut avoir des patrons non superposables.
- Certains solides, comme la sphère, n'ont pas de patron.

Exercice 6. Compléter



a) . . . . . est le patron d'un prisme droit. **b)** . . . . . est le patron d'un cube.
c) . . . . . est le patron d'une pyramide. **d)** . . . . . est le patron d'un cylindre de révolution.
e) . . . . . est le patron d'un cône. **f)** . . . . . est le patron d'un pavé droit.

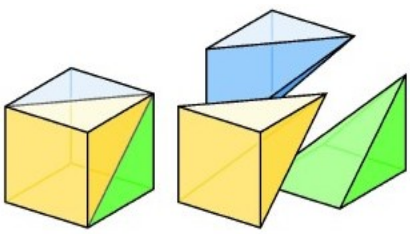
Exercices 11 p 231, 14 et 16 p 232 du manuel Repère.

B. Volume d'un solide

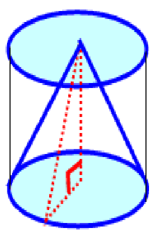
L'astuce pour retenir les formules donnant le volume des solides usuels de l'espace est de les classer en trois catégories :
- Les solides « non pointus » (*prismes dont pavés droits, cylindres*);
- Les solides « pointus » (*pyramides dont tétraèdre, cônes*);
- et la boule.

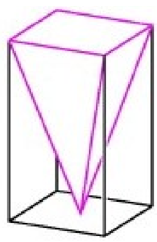
Ainsi vous n'avez que trois formules de volume à connaître.

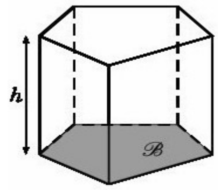
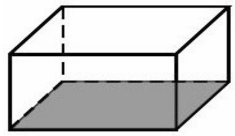
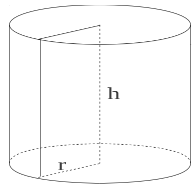
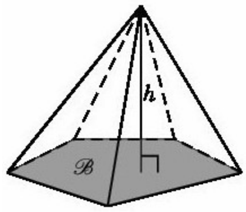
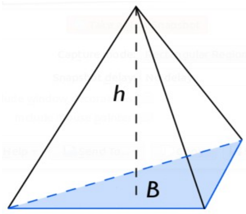
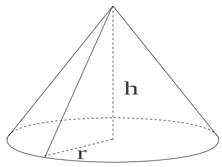
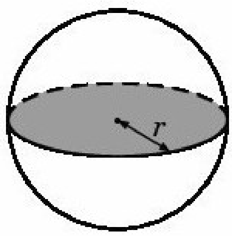
En effet,
- pour tous les solides « non pointus » le **volume** est le **produit de l'aire de la base par la hauteur correspondante** : $\boxed{\mathcal{V}=\mathcal{B}\times h}$ *(formule valable pour tous les solides « NON pointus »)*
- pour tous les solides « pointus » le **volume** est le **tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur correspondante** : $\boxed{\mathcal{V}=\dfrac{\mathcal{B}\times h}{3}}$ *(formule valable pour tous les solides « pointus »).*



Autrement dit, le volume d'un solide « pointu » est le tiers du volume du solide « non pointu » ayant la même base et la même hauteur.
Vous vous n'avez donc finalement que deux formules de volume à connaître : solides non pointus et boule.





Nom	*Définition*	*Représentation*
Solides « NON pointus » (*prismes dont pavés droits, cylindres*) : $\mathcal{V}=\mathcal{B}\times h$		
Prisme droit	**Déf 11.** Un ***prisme droit*** est un solide délimité par deux faces polygonales (appelées ***bases***) reliées par des faces rectangulaires (appelées ***faces latérales***). Les deux bases sont parallèles et superposables, la distance qui les sépare est ***la hauteur du prisme droit***.	
Cas particuliers : ***Pavé droit et cubes***	**Déf 12.** Un ***parallélépipède rectangle***, ou ***pavé droit***, est un prisme à bases rectangulaires. Ses six faces sont donc des rectangles. Les ***cubes*** sont des cas particuliers de pavés droits. Leurs six faces sont des carrés.	
Cylindre de révolution	**Déf 13.** Un ***cylindre de révolution*** est un solide engendré par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés. Il est donc délimité par deux cercles de même rayon (les ***bases***). La distance entre les centres des cercles est la ***hauteur*** du cylindre. Le rayon des deux cercles est aussi le ***rayon*** du cylindre.	
Solides « pointus » (*pyramides dont tétraèdre, cônes*): $\mathcal{V}=\dfrac{\mathcal{B}\times h}{3}$		
pyramide	**Déf 14.** Une ***pyramide*** est délimitée par une face polygonale (appelée ***base)*** reliée à un point (appelé ***sommet***) par des faces triangulaires (appelées ***faces latérales***). La distance qui sépare le sommet de la base est ***la hauteur de la pyramide***.	
Cas particuliers : ***Tétraèdre***	**Déf 15.** Un ***tétraèdre*** est une pyramide à base triangulaire. Elle a donc quatre sommets et ses quatre faces sont des triangles. Un tétraèdre est dit ***régulier*** si ses arêtes sont toutes de même longueur, Dans ce cas, ses quatre faces sont donc des triangles équilatéraux.	
Cône de révolution	**Déf 16.** Un ***cône*** est un solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit. La distance entre le sommet et le centre de la base est ***la hauteur du cône***. Le rayon de la base est aussi le ***rayon du cône***.	
Boule	Boule = sphère pleine : $\mathcal{V}=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ **Déf 17.** Une ***boule*** est un solide engendré par la rotation d'un disque autour d'un de ses diamètres. Le rayon de la sphère (=la surface extérieure) est aussi le ***rayon de la boule***. L'aire d'une sphère de rayon r est $\mathcal{A}=4\pi r^2$	

Sources : manuel repères, et pour les dessins : site http://www.pratiquemath.org, site de Yann Angeli, site http://www.bossetesmaths.com, site http://www.math.brown.edu/