Géométrie dans l'espace, Partie II — 2nde

Partie I : Perspective cavalière, constructions, calculs de distances d'angles et de volumes.
Partie II : Positions relatives de droites et plans de l'espace.

Introduction : Géométrie dans l'espace et Géométrie dans le plan

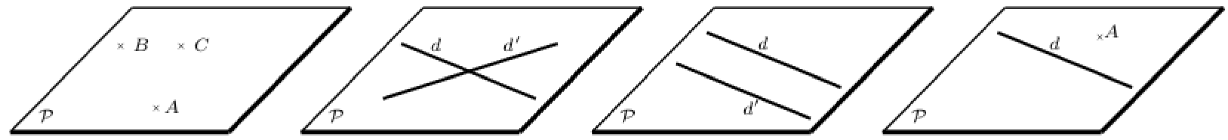
Tous les théorèmes de géométrie plane (droite des milieux, propriétés des parallélogrammes, « deux droites d'un plan sont soit sécantes soit parallèles », etc…) sont valables dans n'importe quel plan de l'espace. En pratique, résoudre un problème de géométrie dans l'espace revient très souvent à regarder ce qui se passe dans un plan donné.

I. Positions relatives des droites et plans de l'espace

Propriété 1. Dans l'espace,

▪ Une droite peut être définie par deux points distincts, *ou* par un point et un vecteur directeur.

▪ Un plan peut être défini par trois points non alignés, *ou* par deux droites sécantes, *ou* par deux droites strictement parallèles, *ou* par une droite et un point extérieur à cette droite.



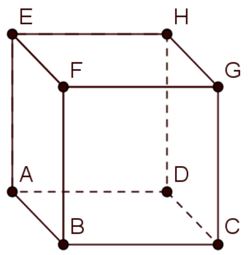
(a) trois points non alignés (b) deux droites sécantes (c) deux parallèles strictes (d) une droite et un point extérieur

Définition 2. ***coplanaires*** signifie « *contenu(e)s dans un même plan.* »

A. Position relative de deux plans de l'espace

Propriété 3. Deux plans sont *soit* sécants (suivant une droite) *soit* parallèles (au sens large).

Rappel : Des plans parallèles (au sens large) peuvent être soit strictement parallèles soit confondus.



Exemple 1.

Dans le cube ABCDEFGH dessiné ci-contre :

1. les plans (ABC) et (EFG) sont . . . .
2. les plans (ABC) et (CHE) sont . . . .

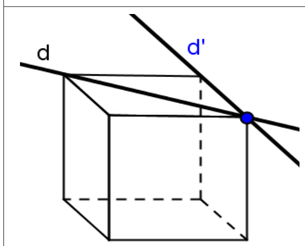
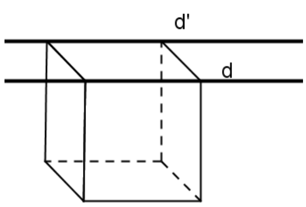
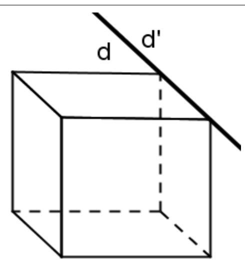
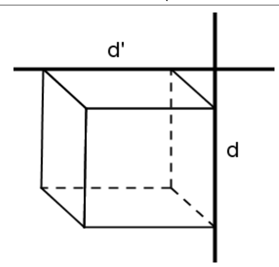
B. Position relative de deux droites de l'espace

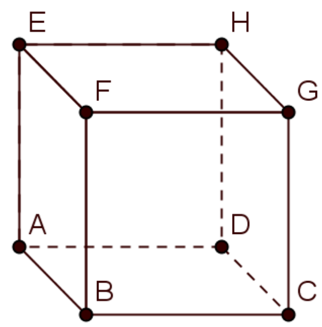
Propriétés : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires (évidemment!)

P4▪ Deux droites coplanaires sont *soit* sécantes (en un point) *soit* parallèles (au sens large) *(on retrouve la géométrie du plan)*.

P5▪ Deux droites non coplanaires ne sont ni sécantes, ni parallèles.

Remarque : ***parallèles au sens large*** signifie « soit strictement parallèles soit confondu(e)s ».

<table>
<tr><td colspan="3">Coplanaires (=dans un même plan)</td><td rowspan="2">Non coplanaires
(ni sécantes, ni parallèles)</td></tr>
<tr><td>d et d' sécantes</td><td colspan="2">d et d' parallèles</td></tr>
<tr>
<td>d et d' ont un unique point d'intersection.</td>
<td>d et d' strictement parallèles</td>
<td>d et d' confondues</td>
<td>d et d' ne sont contenues dans aucun plan</td>
</tr>
</table>



○ Exemple 2.

Dans le cube ABCDEFGH dessiné ci-contre :

1. les droites (AB) et (HG) sont . . . .
2. les droites (CE) et (DF) sont . . . .
3. les droites (AB) et (CF) sont . . . .

Application pratique 6. Pour montrer que deux droites de l'espace sont sécantes, *il suffit de trouver un plan les contenant*. On montre alors que dans ce plan, elles ne sont pas parallèles.

(1) TRÈS utile en pratique pour construire l'intersection de deux droites de l'espace et donc aussi celle d'un plan et d'une droite.
(2) C'est une méthode générale : Résoudre un problème de géométrie dans l'espace revient très souvent à regarder ce qui se passe dans un plan donné.

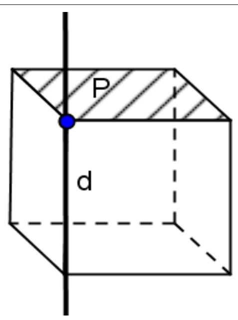
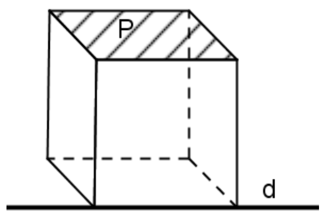
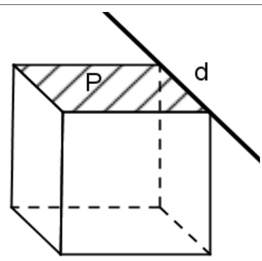
C. Position relative d'une droite et d'un plan

Propriétés :

P7 ▪ Une droite qui a *deux* points communs avec un plan est contenue dans ce plan.

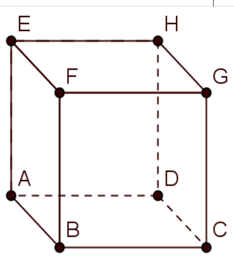
P8 ▪ Une droite qui passe par un point d'un plan *P* et qui est parallèle à une droite de *P* est contenue dans *P*.

P9 ▪ Un plan et une droite sont *soit* sécants (en un point) *soit* parallèles (au sens large).

*Le plan et la droite sont **sécants***	*Le plan et la droite sont **parallèles***	
 Le plan et la droite ont un unique point d'intersection.	 Le plan et la droite sont **strictement parallèles** : Ils n'ont aucun point d'intersection.	 La droite est contenue dans le plan.

○ Exercice 3. Au moyen du cube ABCDEFGH dessiné ci-contre, illustrez le résultat suivant :

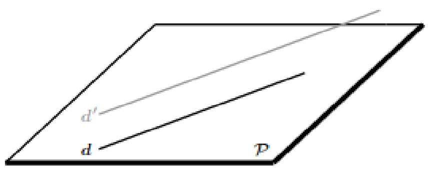
👁 *Attention : Si une droite est parallèle à un plan, on ne peut pas en déduire qu'elle est parallèle à toutes les droites du plan.*



II. Parallélisme dans l'espace

A. Pour montrer qu'une droite est parallèle à un plan

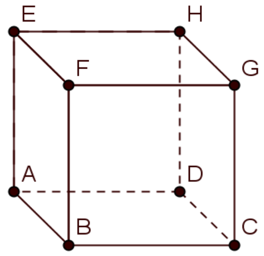
Propriété 10. Une droite est parallèle à un plan ssi[1] elle est parallèle à une droite de ce plan.



[1] *ssi = « si et seulement si », indique que les propositions sont équivalentes.*

♠ Exemple 4. Montrez que la droite (AC) est parallèle au plan (EFG).

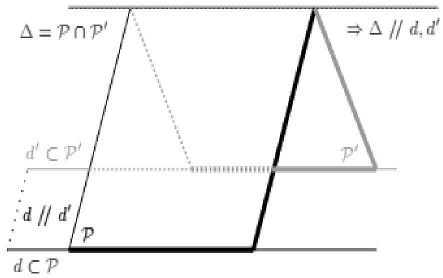
Réponse :La droite (AC) est parallèle à la droite (EG) incluse dans le plan (EFG), elle est donc parallèle au plan (EFG).



B. Intersection de deux plans contenant des droites parallèles

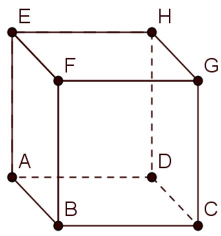
Propriété 11 : Théorème du toit. Si d et d' sont deux droites strictement parallèles alors l'intersection de deux plans contenant respectivement d et d' est une droite Δ parallèle à d et d'

d et d' sont les « gouttières » et Δ est « le fait (le haut) » du « toit ».



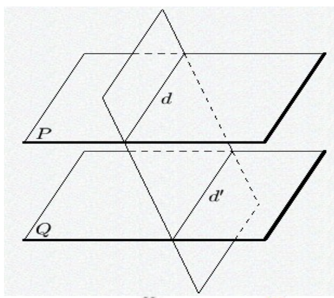
♠ Exercice corrigé 5. Soit ABCDEFGH le cube dessiné ci-contre. Soit I un point n'appartenant pas au plan (FGH). Soit Δ la droite d'intersection des plans (FGI) et (EHI). Montrer que Δ est parallèle à la droite (FG).

Réponse : Comme les droites (FG) et (EH) sont parallèles et contenues respectivement dans les plans (FGI) et (EHI), par le théorème du toit, la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à la droite (FG).



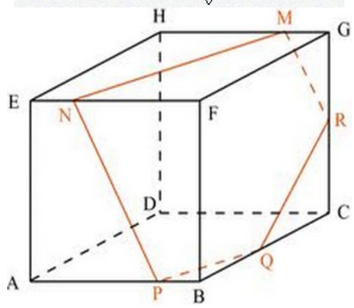
C. Quand un plan coupe deux plans parallèles : Théorème d'incidence

Propriété 12 : Théorème d'incidence. Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont <u>parallèles</u>.



♠ Exemple 6.

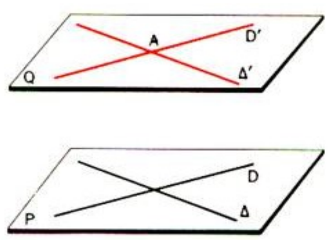
Le dessin ci-contre représente la ***section*** *(= intersection) du pavé ABCDEFGH par le plan MNP.*
Le plan (MNP) coupe les plans parallèles (EFG) et (ABC) suivant des droites parallèles.
Le plan (MNP) coupe les plans parallèles (ADE) et (BCG) suivant des droites parallèles.



→ Résultat très utile pour construire les sections d'un cube (ou plus généralement d'un pavé droit) par un plan!

D. Pour montrer que deux plans sont parallèles

Propriété 13. Pour montrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que l'un contient deux droites sécantes qui sont parallèles à deux droites de l'autre.



<u>Sources</u> : manuel Repères, les logiciels Geogébra et Geospace pour certains dessins, ainsi que les sites de l'IREM Paris Nord, de Yann Angeli et de math'x.

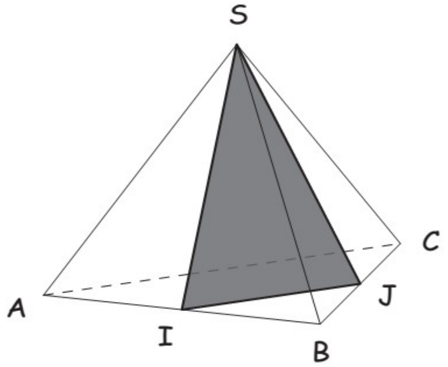
Table des matières

Exercices Droite et Plans de l'Espace [DPE]

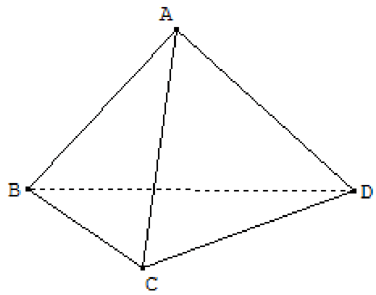
Exercice DPE 7. Le tétraèdre régulier SABC a une arête de longueur 6 cm. I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AB] et [BC].

1) Dessiner, en vraie grandeur, les faces ABC et SAB, puis, sans faire aucun calcul, dessiner en vraie grandeur la section SIJ.

2) Mesurer le périmètre du triangle SIJ et vérifier par le calcul.

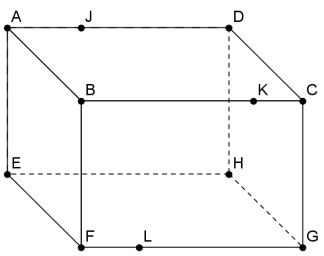


Exercice DPE 8.
ABCD est tétraèdre, P est le milieu de [AD], M et N sont les points de [AB] et [AC] tels que $4\,AM=AB$ et $3\,CN=CA$.
Les droites (MN), (MP) et (NP) coupent le plan (BCD) respectivement en I, J, K.
1) Construire ces points.
2) Pourquoi sont-ils alignés ?

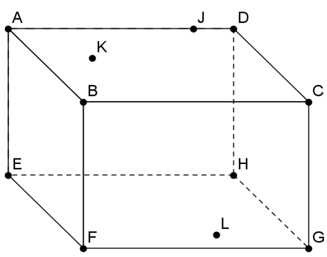


Exercice DPE 9. Section d'un pavé droit par un plan. Dans chacun des cas suivants, ABCDEFGH est un pavé droit. Tracer la section de ce pavé par le plan (JKL).

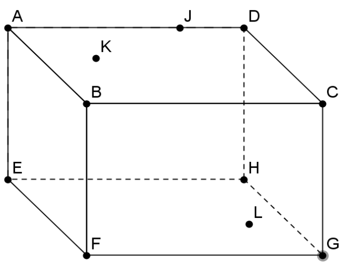
a)



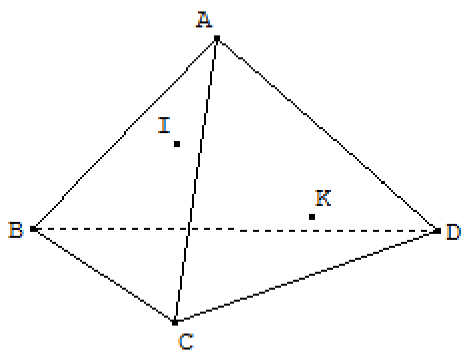
b) $K\in(ABC)$ et $L\in(BCG)$



c) $K\in(ABC)$ et $L\in(EFG)$

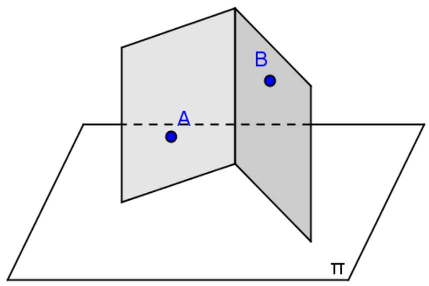


Exercice DPE 10.
Dans le tétraèdre ABCD, I et K sont des points des faces ABC et ACD tels que la droite (IK) n'est pas parallèle au plan (BCD).
1) Construire le point d'intersection de (IK) et (BCD).
2) Construire l'intersection de (BD) et (AIK).



○ Exercice DPE 11.

Construire l'intersection de la droite (AB) et du plan (π).



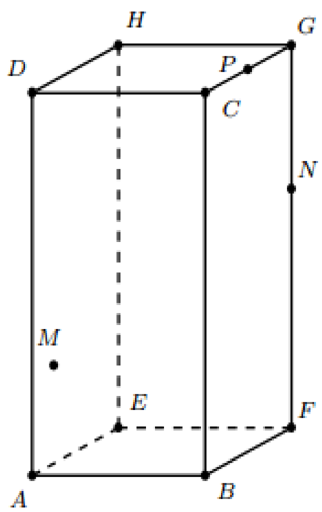
○ Exercice DPE 12.

SABCD est une pyramide et ABCD est un parallélogramme. I est le milieu de l'arête [AS]. J est le point de l'arête [SB] tel que $SJ = \frac{1}{4} SB$.

1) Construire l'intersection des plans (ABS) et (CDS).

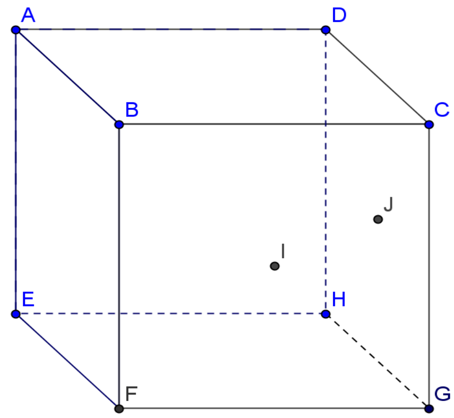
2) Construire l'intersection de (IJ) avec le plan (CDS).

○ Exercice DPE 13. Représenter la section du parallélépipède suivant par le plan (MNP), sachant que $M \in (AED)$, $M \in [GF]$ et $P \in [CG]$. *On pourra commencer par construire L'intersection de (PN) avec le plan (ABE) au moyen d'une droite du plan (ABE) bien choisie. On justifiera soigneusement l'intersection de (MNP) avec la face AEHD .*



○ DPE 14. Section d'un cube par un plan.

Le but de l'exercice est de tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (AIJ) où I et J sont les centres respectifs des faces BCGF et CDHG.



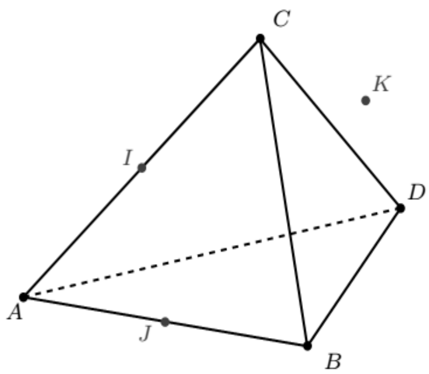
1) Montrez que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.

2) En déduire la construction de la droite (*d*), intersection des plans (ABC) et (AIJ).

3) Construire l'intersection de la droite (*d*) et du plan (CDG). En déduire la trace sur la face DCGH de la section du cube par le plan (AIJ).

4) Finir de tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (AIJ).

○ *Exercice DPE 15. Représenter l'intersection du tétraèdre avec le plan (IJK), en justifiant soigneusement l'intersection de (IJK) avec la face (BCD). Le point I est le milieu de [AC] et *J* est le milieu de [AB], enfin $K \in (BCD)$.

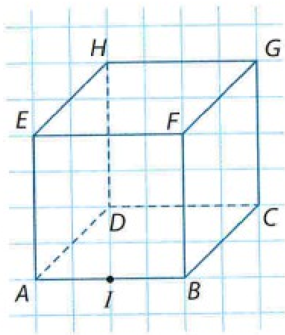


◯ Exercice DPE 16. Position relative. Ardoise !

QCM Pour chaque question, donner **toutes** les bonnes réponses.

Dans l'espace, on considère le cube *ABCDEFGH* ci-contre. Le point *I* est le milieu du segment [*AB*].

1 Les droites (*EF*) et (*CD*) sont :	**a.** parallèles	**b.** sécantes	**c.** coplanaires
2 Les droites (*CD*) et (*FB*) sont :	**a.** sécantes	**b.** parallèles	**c.** non coplanaires
3 Les plans (*DAI*) et (*EFG*) sont :	**a.** parallèles	**b.** sécants	**c.** confondus
4 Les plans (*EHC*) et (*FGC*) sont sécants selon :	**a.** le point *C*	**b.** le segment [*BC*]	**c.** la droite (*BC*)
5 La droite (*FI*) et le plan (*AED*) sont :	**a.** parallèles	**b.** sécants selon un point	**c.** sécants selon une droite



DÉROULEMENT DE LA SÉQUENCE

1) Sections d'un cube /1 de l'IREM paris Nord

2) 𝒞 𝒞 : Oral Positions relatives → deviner PUIS donner cours

3) ◯ Exercice DPE 16. Position relative. Ardoise !

4) ◯ Exercice DPE 8. Intersection de deux plans, d'un plan et d'une droite

5) ◯ Exercice DPE 9. Section d'un pavé droit par un plan. [permet d'introduite Thm incidence]

6) 𝒞 𝒞 : Thm incidence

7) ◯ Exercice DPE 14. Section d'un pavé droit par un plan. [permet d'introduite Thm toit]

8) 𝒞 𝒞 : Thm toit

9) Travail en groupe : Sections de pyramides /1 de l'IREM paris Nord