Premier degré : Fonctions affines, droites, tableaux de signes	2^{nde}

Objectifs du chapitre : Vous devez ....

Droites

- ☐ [$3^{ème}$] savoir tracer une droite dans un repère connaissant son équation.
- ☐ [$3^{ème}$] savoir déterminer l'équation d'une droite connaissant deux de ses points, notamment savoir calculer un coefficient directeur .
- ☐ [$3^{ème}$] connaître l'interprétation graphique du coefficient directeur d'une droite ; Si (d) a pour équation $y=mx+p$, savoir lire m et p sur le graphique représentant (d).
- ☐ savoir que toute droite verticale a une équation de la forme $x=c$ et que toute droite non verticale a une équation de la forme $y=mx+p$.
- ☐ déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes connaissant leurs équations.
- ☐ déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes connaissant leurs équations. Plus généralement, savoir résoudre un système linéaire à deux équations et deux inconnues.
- ☐ prouver que trois points sont alignés en utilisant une équation de droite.

Fonctions affines

- ☐ [$3^{ème}$] Savoir reconnaître les fonctions affines et les fonctions linéaires au vu de leur expression. ($f(x)=mx+p$ pour les fonctions affines et $f(x)=mx$ pour les fonctions linéaires.)
- ☐ [$3^{ème}$] Savoir que la courbe représentative de la fonction affine définie par $f(x)=mx+p$ est la droite d'équation $y=mx+p$.
- ☐ Établir le tableau de variations d'une fonction affine.
- ☐ Établir le tableau de signe d'une fonction affine.

Calcul littéral et études de signes

- ☐ Connaître et savoir utiliser les règles de manipulation des inégalités.
- ☐ [2^{nde}] Résolution d'équations et d'inéquations ($f(x)=0$, $f(x)<g(x)$, $f(x)=m$ ...etc) graphiquement et par le calcul. Notamment, savoir déterminer le signe d'une expression au moyen d'une factorisation suivie d'un tableau de signe.

Objectifs du chapitre en terme de TICE

- ☐ [2^{nde}, déjà vu] Savoir tracer le graphe d'une fonction à l'aide d'une calculatrice.
- ☐ [2^{nde}, déjà vu] Savoir obtenir un tableau de valeur d'une fonction à la calculatrice.
- ☐ [2^{nde}, déjà vu] Savoir trouver une valeur approchée d'une solution d'une équation de type $f(x)=g(x)$ à la calculatrice.

Fiches sur l'utilisation des calculatrices : http://xmaths.free.fr/tice/calculatrice/fiches.htm.

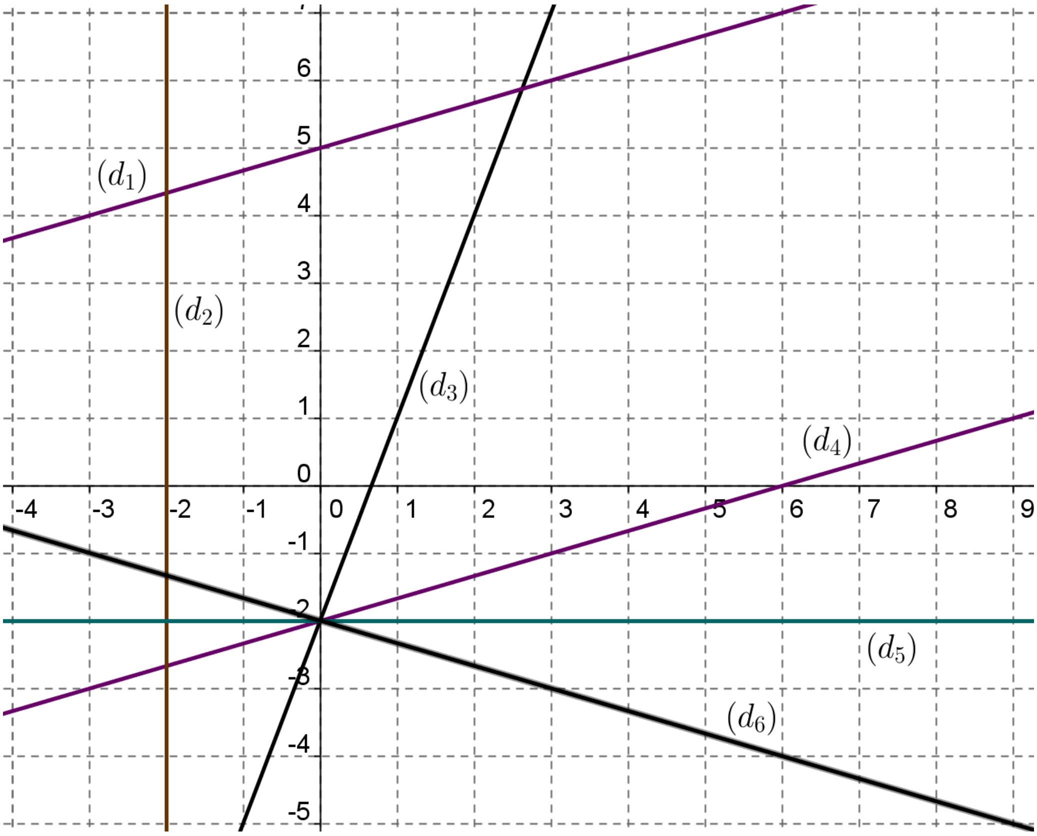
Espace pour cocher ce qui est acquis: Utilisez cette liste d'objectifs pour vérifier que vous êtes au point sur ce chapitre.

Rappel sur les méthodes de travail

Reprendre ce qui a été fait en classe (en faisant des **restitutions** jusqu'à savoir retrouver **sans aucune aide** les définitions et les propriétés vues ou révisées au cours de la séance et refaire **sans aucune aide** les exercices faits en classe au cours de la séance.)

Pour revoir le cours sous forme animée et faire des exercices interactifs:
http://mathenpoche.sesamath.net/#2_N3

Je me souviens … | 2^{nde}



Sur le graphique ci-dessus sont représentées six droites.

1) Associez à chaque droite son équation.

…… : $y=\frac{1}{3}x-2$ …… : $y=3x-2$ …… : $y=-\frac{1}{3}x-2$

…… : $y=-2$ …… : $y=\frac{1}{3}x+5$ …… : $x=-2$

2) Résolvez les systèmes suivants puis vérifiez graphiquement vos résultats.

$(s_1)\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+5 \\ y=3x-2 \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} y=\frac{1}{3}x-2 \\ x=-2 \end{cases}$ $(S_3)\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+5 \\ y=\frac{1}{3}x-2 \end{cases}$

3) a) <u>Généralisation</u> : Déterminer le <u>nombre</u> de solutions du système $\begin{cases} y=mx+p \\ y=m'x+p' \end{cases}$, suivant les valeurs de m, m', p et p'.

b) En déduire un algorithme qui à partir des valeurs de m, m', p et p' affiche le <u>nombre</u> de solutions du système $\begin{cases} y=mx+p \\ y=m'x+p' \end{cases}$.

4) Résolvez par le calcul l'inéquation $3x-2>\frac{1}{3}x+5$ puis vérifiez graphiquement vos résultats.

COURS	**Premier degré :** **Fonctions affines, droites, tableaux de signes**	2^{nde}

I. Droites

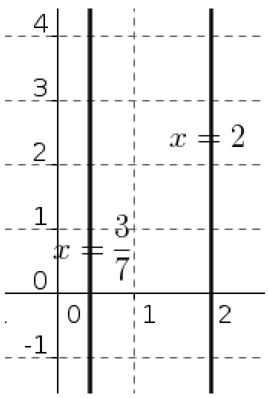
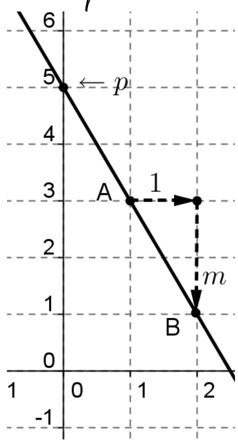
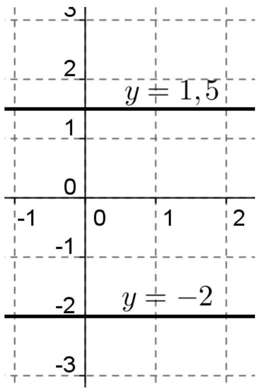
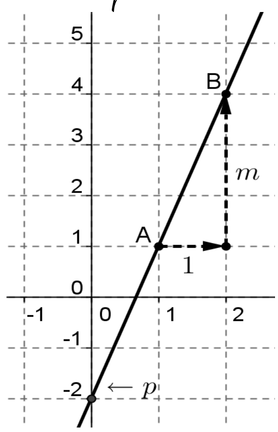
Définition 1. Le plan étant muni d'un repère (*pour avoir des coordonnées*), le point $A(x_A ; y_A)$ appartient à la droite d'équation $y=mx+p$ ssi ses coordonnées vérifient $y_A=m x_A+p$.

P2 ▪ Une ***équation de droite*** donne donc un critère pour savoir si un point est ou non sur une droite donnée : Le point est sur la droite ssi ses coordonnées satisfont l'équation de la droite.

○ Exemple 1. (sans calculatrice) Le point $A(2{,}1 ; 6{,}1)$ appartient-il à la droite d'équation $y=5x-4{,}3$?

A. Il existe deux sortes de droites...

■ **P3** ▪ Il existe deux sortes de droites : les droites *verticales*, qui ont une équation de la forme $x=k$, et les droites *non verticales*, qui ont une équation de la forme $y=mx+p$.

Deux sortes de droites	les droites verticales	les droites non-verticales		
... ont une équation de la forme...	$x=k$	$y=mx+p$ m est le ***coefficient directeur*** *p est l'**ordonnée à l'origine*** A et B étant deux points de la droite, $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\Delta\,vert.}{\Delta\,horiz.}$.		
Représentation graphique		$m<0$ *Droite qui « descend »* 	$m=0$ *Droite horizontale*  $y=-2 \Leftrightarrow y=0\times x-2$ donc $m=0$	$m>0$ *Droite qui « monte »* 

Interprétation graphique du coefficient directeur.

P4 ▪ Si $m>0$, la droite « monte » quand on va de la gauche vers la droite ;

▪ si $m=0$, la droite est horizontale

▪ et si $m<0$, la droite « descend » quand on va de la gauche vers la droite .

P5 ▪ Si on part de n'importe quel point de la droite et que l'on se déplace horizontalement d'une unité vers la droite, pour revenir sur la droite, il faut se déplacer verticalement de m unités *(+ si on va vers le haut et – si on va vers le bas).*

B. Intersection de deux droites

■ Deux droites verticales distinctes sont parallèles, elles ne sont donc jamais sécantes.

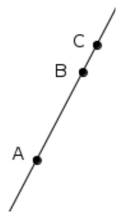
■ Une droite verticale et une droite non verticale sont toujours sécantes.

■ Cas de deux droites non-verticales : Intersection de $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$:

Propriété 6. Les droites d'équation $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur càd ssi $m=m'$.

	$m\neq m'$ *droites sécantes*	$m=m'$ *droites parallèles, confondues ou non*	
		$p=p'$ *droites confondues*	$p\neq p'$ *droites parallèles non confondues*
Représentation graphique			
Nombre de points d'intersection des droites d'équation $y=mx+p$ *et* $y=m'x+p'$.			

C. Méthodes pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés



- **Méthode 1** :
  - On détermine l'équation de la droite (AB).
  - Puis on montre que C appartient à la droite (AB) en prouvant que les coordonnées de C vérifient l'équation de la droite (AB).
- **Méthode 2** : On démontre que les droites (AB) et (AC) sont parallèles *(si elles sont toutes deux non-verticales, il suffit de prouver qu'elles ont le même coefficient directeur.)* En effet, deux droites parallèles qui ont un point commun sont forcément confondues.
- **Méthode 3** : *[Quand nous aurons fait le chapitre sur les vecteurs]* On démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

II. Fonctions affines et linéaires

A. Définition d'une fonction affine et d'une fonction linéaire

Définition 7.
1) f est une fonction ***affine*** ssi $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x)=mx+p$, m et p étant des nombres.
2) Cas particuliers: (a) Si $p=0$, $f(x)=mx$ et dans ce cas, x et $f(x)$ sont proportionnels, le coefficient de proportionnalité étant m. On dit alors que f est une fonction ***linéaire***.
(b) *Si* $m=0$, $f(x)=p$ et dans ce cas, la fonction f est . . . .

Exemple 2. Les fonctions suivantes sont-elles affines ? linéaires ? Si oui, donner *m* et *p*. *(Calculs dans le cahier d'exercices, réponses dans le tableau)*

1) $f(x)=\dfrac{2x-5}{7}$; **2)** $g(x)=4(3-5x)+2(6-x)$; **3)** $h(x)=\sqrt{2}x-\pi$;
4) $k(x)=2x(-4x-1)$; **5)** $v(x)=x(3-6x)+x^2(6-x)+x^3$.

Fonction	*f*	*g*	*h*	*k*	*v*
Affine ?					
Linéaire ?					
Le cas échéant, m= ?					
Le cas échéant, p= ?					

B. Une Application importante des fonctions linéaires : Les calculs de pourcentages

Exemple 3. On note *x* le prix initial et $f(x)$ le prix final d'un produit.

1) Si les prix augmentent de 17 %, f est définie par $f(x)=$ . . . .
C'est une fonction . . . . de coefficient multiplicateur . . . .

2) Si les prix diminuent de 14 %, f est définie par $f(x)=$ . . . .
C'est une fonction . . . . de coefficient multiplicateur . . . .

3) Si les prix doublent, f est définie par $f(x)=$ . . . . C'est une fonction . . . . de coefficient multiplicateur . . . . Elle traduit une augmentation de . . . . . . %.

◯ *Indispensable : Exercice 27 p 70 du manuel repères (et un qui ressemble au DS?)*

C. Représentation graphique

Propriété 8.

1) La courbe représentative de la fonction affine définie par $f(x)=mx+p$ est la droite d'équation $y=mx+p$.

2) Dans le cas particulier où f est linéaire, sa courbe représentative est une . . . . qui passe par . . . .

D. Sens de variations et signe de mx+p

[*Le faire d'abord en exos ou Do Now sur des exemple pour revoir les règles de manipulations des inégalités*]

■ **Rappels.**

Règles de manipulations des inégalités.

P9 ▪ Dans une inégalité, l'ordre est conservé quand on ajoute (ou on soustrait) un même nombre à ses deux membres.

P10 ▪ Dans une inégalité, l'ordre est conservé quand on multiplie (ou quand on divise) par un même nombre **positif non nul** ses deux membres.

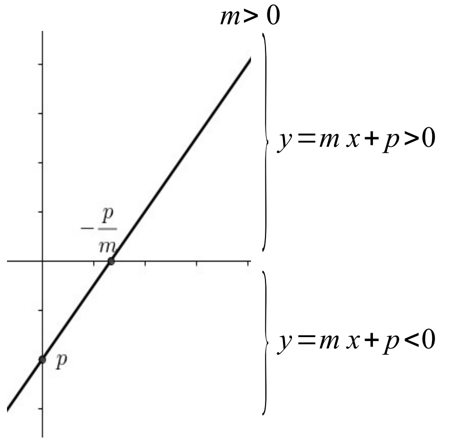
P11 ▪ Dans une inégalité, l'ordre est **inversé** quand on multiplie (ou quand on divise) par un même nombre **négatif non nul** ses deux membres.

■ **Variations**

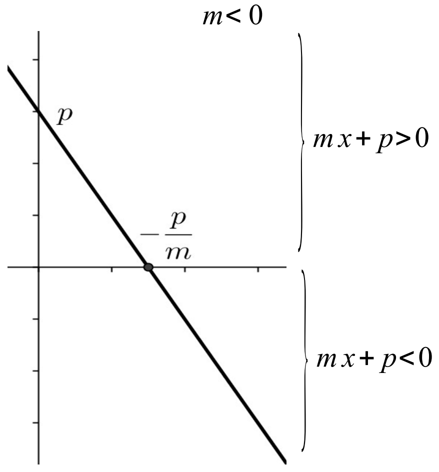
$m>0$	$m<0$
Si $m>0$ alors la fonction affine définie par $f(x)=mx+p$ est croissante sur $\mathbb{R}$	Si $m<0$ alors la fonction affine définie par $f(x)=mx+p$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

■ **Représentation graphique**

$m>0$



$m<0$



■ **Tableau de signe** *(À vous!)*

$m>0$

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $mx+p$	

$m<0$

x	
Signe de $mx+p$	

III. Signe d'une expression et tableau de signe

[P12] Règles des signes

▪ Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise deux nombres de *même* signe, on obtient un nombre *positif*.

▪ Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise deux nombres de *signe contraire*, on obtient un nombre *négatif*.

Illustration sous forme de tableau de signe

Si le signe de a *est...*	$+$	$+$	$-$	$-$
et si le signe de b *est...*	$+$	$-$	$+$	$-$
alors le signe de $a \cdot b$ *et* $\frac{a}{b}$ *est*				

> ✋ Parents, élèves, tuteurs: Ne faites **PAS** les exercices des polycopiés de cours à l'avance: Nous les ferons EN CLASSE.

◯ Exemple 4. Inéquation produit

Résoudre $36-4x^2 \leq 0$.

• On remarque que : $36-4x^2 = \dots\dots^2 - \dots\dots^2 = (\dots\dots + \dots\dots)(\dots\dots - \dots\dots)$

• On peut donc se ramener à l'étude d'un produit de facteurs du premier degré :
$36-4x^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\dots\dots + \dots.)(\dots\dots - \dots..) \leq 0$

• On construit le tableau de signes correspondant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\dots + \dots$	
$\dots - \dots$	
$(\dots + \dots)(\dots - \dots)$	

• On y lit la solution : $\mathcal{S} = \dots$

Point-méthode 13. Pour résoudre une inéquation

1) On met tout du même côté — *On obtient une inéquation de la forme* $f(x)>0$ *ou* $f(x)<0$ *ou* $f(x)\geqslant 0$ *ou* $f(x)\leqslant 0$

2) On factorise — *On obtient une inéquation de la forme* $(\dots)\times(\dots)>0$ *ou* $(\dots)\times(\dots)<0$ *...etc*

3) On fait un tableau de signe — *qui permet de trouver le signe ! C'est pour cela qu'on a transformé la question en 1)*

4) On y lit la réponse.

Remarque : Cela démarre comme les résolutions d'équations. Rappelez-vous :

Point-méthode 14. Pour résoudre une équation

1) On met tout du même côté — *On obtient une équation de la forme* $f(x)=0$

2) On factorise — *On obtient une équation de la forme* $(\dots)\times(\dots)=0$

3) Comme un produit est nul ssi un (au moins) des facteurs est nul, on est ramené à deux équations (plus simples que l'équation initiale). *Si on ne sait toujours pas les résoudre on factorise de nouveau jusqu'à obtenir des équations que l'on sait résoudre.*

◯ Exemple 5. Inéquation quotient. Résoudre $\frac{x+4}{x-2} \geqslant 3$.

• Valeur interdite : le dénominateur ne doit pas s'annuler donc $x \neq \dots.$

• On se ramène à une inéquation dont le second membre est nul puis on factorise :

$$\frac{x+4}{x-2} \geqslant 3 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-2} - \dots. \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-2} - \frac{\dots\dots\dots\dots}{x-2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x+4-(\dots\dots\dots\dots)}{x-2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\dots\dots\dots\dots}{x-2} \geqslant 0$$

• On construit alors le tableau de signes correspondant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\dots.$	
$x-2$	
$\frac{\dots}{x-2}$	

• On y lit la solution : $\mathcal{S} = \dots$

Sources : Le cours de M. Degos (merci à lui!), le manuel Repères et mes cogitations.

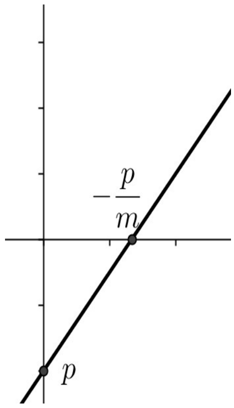
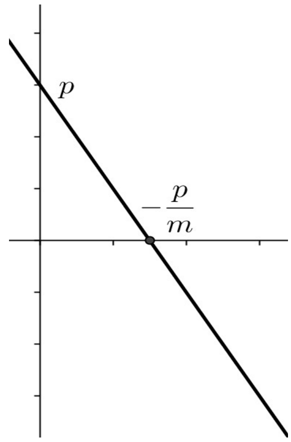
Table des matières

I. Droites **3**
A. Il existe deux sortes de droites........3
B. Intersection de deux droites........3
C.Méthodes pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés........4
II.Fonctions affines et linéaires **4**
A. Définition d'une fonction affine et d'une fonction linéaire........4
B.Une Application importante des fonctions linéaires : Les calculs de pourcentages........4
C. Représentation graphique........5
D.Sens de variations et signe de mx+p........5
III. Signe d'une expression et tableau de signe **6**

Coin prof

A faire :

- Exercices avec des équations de médianes (Ex 80 p 276) pour revoir les coordonnées du milieu et insister sur le fait qu'on peut rencontrer des droites indépendamment des fonctions affines.
- Programmer sur calculatrice un algorithme qui à partir des coordonnées de deux points donne l'équation de la droite correspondante (pour une droite non verticale puis améliorer pour que cela marche que la droite soit verticale ou non).

	$m>0$	$m<0$
Variations	Si $m>0$ alors la fonction définie par $f(x)=mx+p$ est croissante sur $\mathbb{R}$	Si $m<0$ alors la fonction définie par $f(x)=mx+p$ est décroissante sur $\mathbb{R}$
Représentation graphique	$m>0$  accolades ici mx+p>0 ici mx+p<0	$m<0$ 
Tableau de signe		

Démonstrations

♠ Démonstration de P18.

Corrigé des exemples du cours

♠ Corrigé de l'exemple 1.

<u>NB</u>: Comment masquer ou afficher les discussions entre profs, les démonstrations, les exercices ou les paragraphes en préparation...etc (Les variables que j'utilise dépendent des documents)

- Dans la version Open Office de ce document, les **corrigés** par exemples (s'ils existent) sont visibles sauf quand la variable CORR prend la valeur M (« M » pour « Masqué »). Une variable est un champ particulier (de type texte) et se crée de la même façon : « Insérer » puis « champs ». Attention ! Il faut placer la variable AVANT les sections qu'elle pilote. Dans ce document, il y a aussi une variable DEM pour les démonstrations et une variable DP (Discussions entre profs) qui masquent les paragraphes correspondants quand elles valent M.
- Les différentes variables se pilotent en haut du document (Elles sont en grisé dans le titre du .odt et invisibles dans le pdf). Mettre le curseur à gauche de la bande grise, puis cliquer à droite et aller dans « champs ».
- Pour créer une section à masquer, sélectionner le texte à masquer, puis « insertion », puis «section » puis cliquer sur masquer : La condition s'écrit : CORR==« M » (Il faut les guillemets autour du M, un double égal et pas d'espaces).
- Pour faire réapparaître la section, changer la valeur de CORR à une autre valeur que M.
- Idem pour la variable EP (En Préparation) qui permet de masquer les exercices qui ne sont pas finis ou que j'envisage de mettre dans le DS. Elle vaut pour le moment EP=V et les sections correspondantes sont masquées quand EP=M.
- Dans ce document il y a aussi une variable DP = Discussion entre Profs, qui est un copier-coller des interventions des uns et des autres sur la liste « mathsLyc ».
- Quand un exercice ou un paragraphe est prêt on peut supprimer la section correspondante (pour qu'il soit visible tout le temps) avec « Format » puis « Sections »
- Évidemment dans le pdf cela ne marche pas, c'est tout l'intérêt....