Fonctions — 2nde

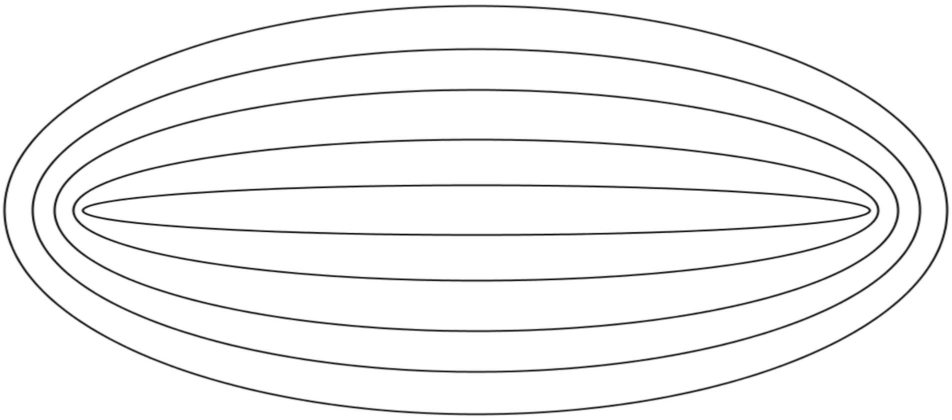
I. Mise au point sur les ensembles de nombres

A. Des ensembles de nombres emboîtés

Définitions 1.

- L'ensemble des ***entiers naturels*** est noté $\mathbb{N}$ avec $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4\dots\}$.
- L'ensemble des ***entiers relatifs*** est noté $\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{Z}=\{\dots-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\dots\}$.
- L'ensemble des ***nombres décimaux***, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Autrement dit, un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{n}{10^p}$ où n est un entier relatif $(n\in\mathbb{Z})$ et p est un entier naturel $(p\in\mathbb{N})$.
- L'ensemble des ***nombres rationnels***, noté $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble fractions, càd des nombres de la forme forme $\frac{n}{p}$ où n est un entier relatif $(n\in\mathbb{Z})$ et p est un entier naturel $(p\in\mathbb{N})$.
- L'ensemble des ***nombres réels***, noté $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble de tous les nombres connus en classe de seconde. Chaque nombre réel correspond à un unique point d'un axe gradué. C'est l'***abscisse*** de ce point. On a bien sûr $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

◯ Exercice 1. Compléter le dessin pour illustrer que $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. et y placer $\frac{7}{6}, 87, -9, \sqrt{2}, \frac{3}{5}$.



B. Les intervalles

Définition (intuitive) 2. Sur une droite graduée, les ***intervalles*** sont les parties de $\mathbb{R}$ qui correspondent à un segment, une droite ou une demi-droite. Ce sont les parties « d'un seul tenant », ou encore « sans trou ».

♠ Exemple 2. L'ensemble des nombre supérieurs à 17 forme un intervalle.

◯ Exercice 3. *a et b sont deux nombres réels avec a<b. Compléter le tableau suivant.*

L'intervalle noté …	*est l'ensemble des réels x tels que …*	*Il est représenté sur une droite graduée par un segment :*
$[a;b]$	$a\leqslant x\leqslant b$	a b
	$a<x<b$	a b
$[a;b[$		a b
$]a;b]$	$a<x\leqslant b$	a b

L'intervalle noté …	*est l'ensemble des réels x tels que …*	*Il est représenté sur une droite graduée par un segment :*
$[a;+\infty[$	$x\geqslant a$	a
$]a;+\infty[$		a
	$x\leqslant b$	b
$]-\infty;b[$		b

Notation 3. Si le crochet « *attrape* » le nombre a , cela veut dire que a appartient à l'intervalle d'extrémités a et b. Si le crochet «*tourne le dos* » au nombre a , cela veut dire que a n'appartient PAS à l'intervalle. Ainsi $a \in [a;b]$ mais $a \notin]a;b]$.

Remarque : « $+\infty$ » se lit « *plus l'infini* ».

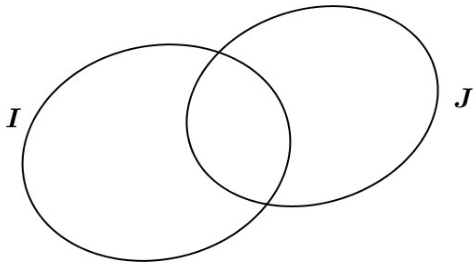
C. Intersection et réunion

Nous aurons à considérer des réunions et des intersections d'intervalle :

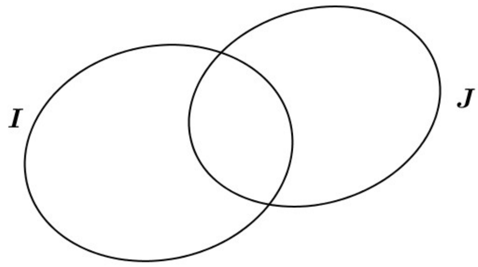
Définitions 4. Soient I et J deux ensembles.
▪ L'***intersection de I et J***, notée $I \cap J$ est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à I et J.
▪ La ***réunion de I et J***, notée $I \cup J$ est l'ensemble des éléments appartenant à I ou J, càd[1] les éléments qui sont dans I, dans J ou dans les deux.

Exercice 4.

Hachurer $I \cap J$ dans la figure ci-dessous :



Hachurer $I \cup J$ dans la figure ci-dessous :



♠ Exemple 5.
L'ensemble des nombre qui vérifient $x^2 \geqslant 9$ sont les nombres x qui vérifient $x \leqslant -3$ OU $x \geqslant 3$. *(mais si ! par exemple* $(-4)^2 = 16 > 9$ *donc -4 convient).* On note $x^2 \geqslant 9 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[$ (« $\Leftrightarrow$ » se lit « *équivaut à* » et a le même sens que « *ssi* »). L'ensemble $]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[$ n'est pas un intervalle car il n'est pas d'un seul tenant.

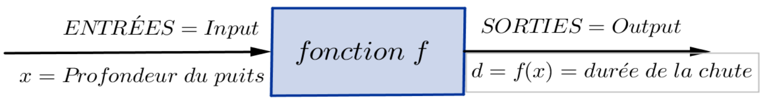
♠ Exemple 6. Le calcul de $\dfrac{x^2}{x+1}$ est possible pour toutes les valeurs de x sauf $x = -1$. En effet, remplacer x par -1 conduirait à diviser par zéro, ce qui n'est pas possible. L'ensemble formé de tous les nombres sauf -1 se note $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ou bien $\mathbb{R} - \{-1\}$ (Lire : « $\mathbb{R}$ *privé de* -1 »).

II. Notion de fonction

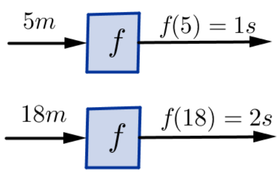
A. Un exemple pour se faire une idée intuitive

♠ Exemple 7. Si on lâche une pierre dans un puits, plus le puits est profond et plus la chute de la pierre dure longtemps. La durée d de chute d'une pierre jusqu'au fond du puits est une fonction de la profondeur x du puits.

▪ Schématiquement :



Ainsi si on lâche une pierre dans un puits profond de 5 m, la pierre mettra 1 seconde à atteindre le fond et si on lâche une pierre dans un puits profond de 18 m, la pierre mettra 2 seconde à atteindre le fond.



▪ En notant f la fonction qui à la profondeur du puits associe la durée de la chute, ces phrases s'écrivent $f(5) = 1$ et $f(18) = 2$.
▪ On dit que 1 [*valeur de sortie*] est ***l'image*** de 5 par la fonction f et que 5 [*valeur d'entrée*] est ***un antécédent*** de 1 par la fonction f .

▪ x , qui est la profondeur du puits, ne peut prendre que des valeurs positives ou nulle (sinon avec des profondeurs négatives ce n'est plus un puits, c'est une colline!). On dit que le ***domaine de définition de f*** [= *ensemble des valeurs d'entrée possibles*] est l'ensemble des nombres positifs ou nuls, ce que l'on note $D_f = [0;+\infty[$. *(Et voilà pourquoi on a étudié les intervalles avant!)*

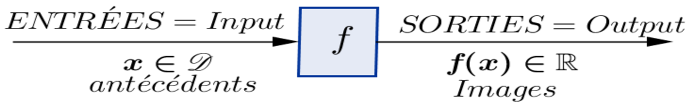
[1] *càd = c'est à dire.*

▪ Plus le puits est profond et plus la chute de la pierre dure longtemps. Autrement dit, avec les notations des fonctions, si la profondeur x augmente, alors la durée de chute $f(x)$ augmente : On dit que la fonction f est ***croissante***.

<u>Remarque</u> : La physique nous dit que la durée de chute $f(x)$ est donnée par $f(x)=\sqrt{\frac{x}{4,9}+\frac{x}{330}}$ où x est la profondeur du puits exprimée en mètres et $f(x)$ le temps que met une pierre lâchée en haut du puits à atteindre le fond exprimée en secondes.

B. Vocabulaire: Fonction, Domaine de définition, Image d'un nombre

Définition 5. Définir une fonction f sur un ensemble $\mathscr{D}$ contenu $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque nombre $x\in\mathscr{D}$ un nouveau nombre noté $f(x)\in\mathbb{R}$.



- L'ensemble $\mathscr{D}$ est le ***domaine de définition*** ou l'***ensemble de définition*** de la fonction f. C'est l'ensemble des x pour lesquels $f(x)$ existe.
- Le nombre $f(x)$ est ***l'image*** du nombre réel x par la fonction f.
- La ***courbe représentative*** $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère $(O;I;J)$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x\in\mathscr{D}$ et $y=f(x)$.

Remarques 6.

- Ne pas confondre les notations f (*une fonction*), $f(x)$ (*un nombre*) et $\mathscr{C}_f$ (*une courbe*).
- L'<u>image</u> d'un nombre x est donc $y=f(x)$ et se lit graphiquement sur l'axe des <u>ordonnées</u> (« axe des y »).
- S'il y a plusieurs fonctions, par exemple f et g, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathscr{C}_g$ celle de g. De même, on note $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de f et $\mathscr{D}_g$ celui de g.
- Par définition, un point M de coordonnées $(x;y)$ appartient à la courbe représentative de f si et seulement si son abscisse est dans le domaine de définition ET son ordonnée est l'image de son abscisse par f. (*Ce qu'on peut ré-écrire de façon claire et succincte sous la forme:* $M(x;y)\in\mathscr{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathscr{D} \\ y=f(x)\end{cases}$). Ceci donne un critère simple et efficace pour savoir si un point est sur une courbe ou non.

<u>Exemple 8</u>. Fonction donnée par sa courbe

La courbe ci-contre représente une fonction f.

• Ensemble de définition de f : $\mathscr{D}$ = ...

• Images : Exemple: $f(1,5)=1$

$f(0,5)=\ldots$

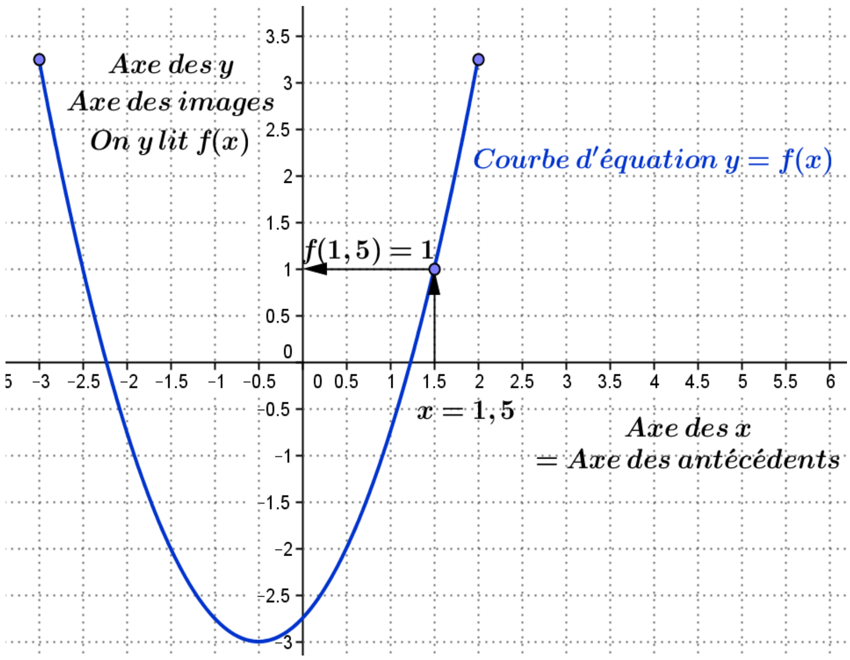
$f(-2,5)=\ldots$

$f(2)=\ldots$

$f(0,25)\approx\ldots$

• Le maximum de f est . . . .

• Le minimum de la fonction f est . . . .



Exemple 9. Fonction donnée par son expression.

1) *Compléter*: Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x)=2x^2+4x-1$ alors $g(-\sqrt{3})$ = ...

(Pour calculer $g(-\sqrt{3})$ on remplace x par $-\sqrt{3}$ dans l'expression de $g(x)$).

2) Le point $A\left(\frac{2}{3};2{,}6\right)$ appartient-il à la courbe représentative de g ?

C. Antécédents

Définition 7. Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. L'ensemble des antécédents d'un réel y par la fonction f est l'ensemble des $x \in \mathscr{D}$ tels que $f(x)=y$, ou encore l'ensemble des x qui ont pour image y par la fonction f.

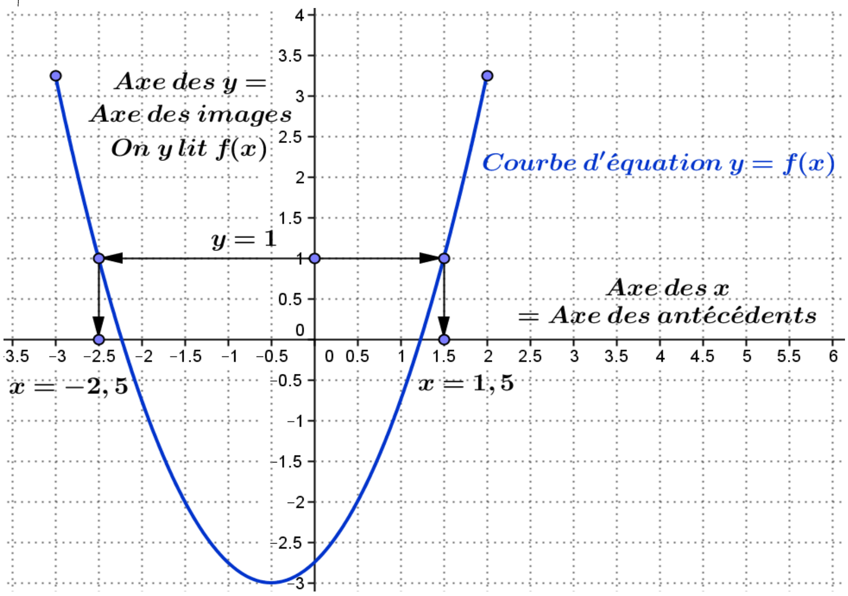
Remarques 8.

- Alors qu'un nombre $x \in \mathscr{D}$ n'a qu'une seule image par la fonction f, un nombre y peut avoir un, plusieurs ou aucun antécédent par la fonction f.
- Les antécédents sont les solutions x de l'équation $y=f(x)$. Graphiquement, ils se lisent sur l'axe des abscisses (axe des x).

Exemple 10. Fonction donnée par sa courbe

La courbe ci-contre représente une fonction f.

- *Exemple*: (voir figure) Les antécédents de 1 sont $-2{,}5$ et $1{,}5$. On peut aussi dire que les solutions de l'équation $f(x)=1$ sont $-2{,}5$ et $1{,}5$.
- Les antécédents de -2 sont . . . .
- Les solutions de l'équation $f(x)=2$ sont . . . .



Exemple 11. Fonction donnée par son expression.

Soit h la fonction définie par $h(x)=2x^2+3$

1) Déterminer s'il(s) existe(nt) le ou les antécédent(s) de 35 par h.

2) Déterminer s'il(s) existe(nt) le ou les antécédent(s) de 3 par h.

3) Déterminer s'il(s) existe(nt) le ou les antécédent(s) de 1 par h.

III. Résolution graphiques d'équations et d'inéquations.

Objectif: Résoudre des équations de la forme $f(x)=23$ ou $f(x)=0$ et des inéquations de la forme $f(x)\geqslant 3$ ou $f(x)<5$. *(Dans une **équation**, il y a une **égalité** et dans une **inéquation**, il y a une **inégalité**)*

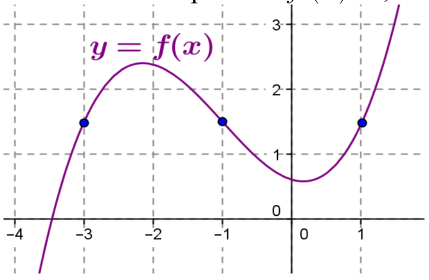
Remarques 9.

- ***Résoudre*** $f(x)=k$ veut dire que l'on cherche toutes les valeurs de x qui conviennent.
- Bien sûr les solutions, qui sont des valeurs de x, se liront « l'axe des x ».

Les exemples corrigés ci-dessous peuvent vous aider pour la rédaction des exercices.

♠ Exemple 12.

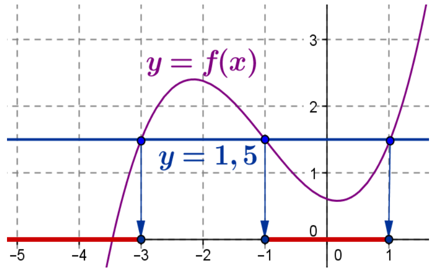
La fonction f représentée ci-dessous est définie sur ℝ. Résoudre l'inéquation $f(x)<1{,}5$.



Solution:

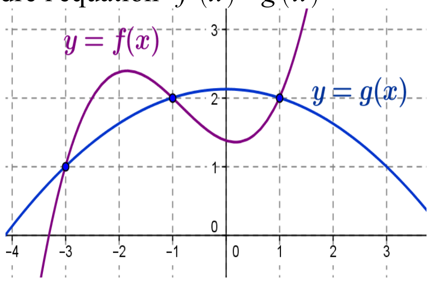
Les solutions de $f(x)<1{,}5$ sont les abscisses des points de la courbe de f situés en dessous de la droite d'équation $y=1{,}5$. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S}=]-\infty;-3[\cup]-1;1[$.

Remarque: Les crochets indiquent qu'il s'agit d'intervalles.



♠ Exemple 13.

Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$



Solution:

Les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes de f et g. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S}=\{-3;-1;1\}$

Remarque: Les accolades indiquent qu'il s'agit d'une liste de nombres et non d'un intervalle: Cette notation indique qu'il y a trois solutions qui sont -3, -1 et 1.

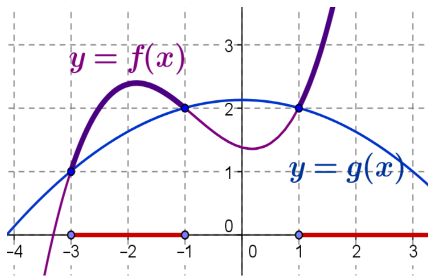
♠ Exemple 14. Même figure que ci-dessus.

Résoudre l'équation $f(x)\geq g(x)$.

Solution:

Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au dessus de $\mathcal{C}_g$ ou sur $\mathcal{C}_g$. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S}=[-3;-1]\cup[1;+\infty[$.

Remarque: Les crochets indiquent qu'il s'agit d'intervalles.



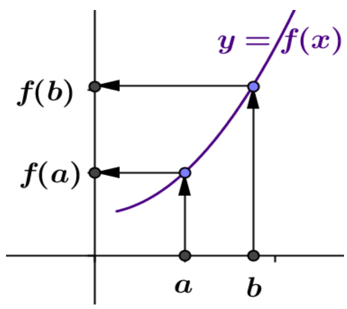
IV. Variations et extrema

Définition 10. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est ***croissante sur I*** ssi

pour tout $a, b\in I$, si $a<b$ alors $f(a)\leqslant f(b)$

- $f(a)$ et $f(b)$ sont dans le même ordre que a et b.
- La courbe représentative de f semble monter.
- f préserve le sens des inégalités.



◯ Exemple 15. Sens de variation d'une fonction affine

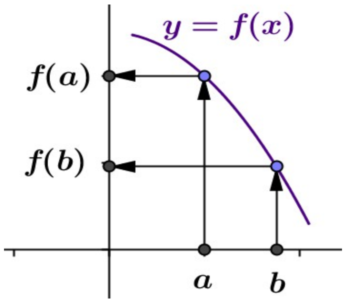
Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=2x-5$. Prouver au moyen de la définition d'une fonction croissante que f est croissante sur ℝ.

Définition 11. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est ***décroissante sur I*** ssi

pour tout $a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$

- $f(a)$ et sont dans l'ordre inverse de et
- La courbe représentative de f semble descendre
- f inverse le sens des inégalités (= retourne les inégalités)



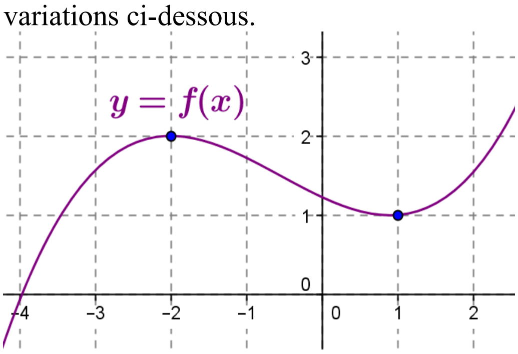
○ Exemple 16. Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = -3x + 2\sqrt{3}$. Prouver au moyen de la définition que f est décroissante sur $f(a)$.

Définitions 12.

- On dit que f est ***strictement croissante sur I*** ssi
  pour tout $a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
- On dit que f est ***strictement décroissante sur I*** ssi
  pour tout $a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$
- Une fonction est ***monotone*** sur I si elle est soit croissante sur I soit décroissante sur I.
- Une fonction est ***strictement monotone*** sur I si elle est soit strictement croissante sur I soit strictement décroissante sur I.
- Le ***maximum*** d'une fonction est la plus grande valeur (si elle existe) prise par la fonction sur son domaine de définition. (*C'est donc une valeur de f(x) et pas la valeur de x correspondante. C'est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe.*)
- Le ***minimum*** d'une fonction est la plus petite valeur (si elle existe) prise par la fonction sur son domaine de définition. (*C'est donc une valeur de f(x) et pas la valeur de x correspondante. C'est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe.)*
- Un ***extremum*** d'une fonction est un maximum ou un minimum. Ainsi si on vous demande « les extremums » (ou « les extrema » pour ceux qui respectent les terminaisons latines), on attend le maximum (s'il existe) ET le minimum (s'il existe).

■ On résume souvent les variation d'une fonction et les valeurs prises par cette fonction en des points particuliers par un ***tableau de variations***.

♠ Exemple 17. Les variation de la fonction f représentée ci-dessous sont schématisées dans le tableau de variations ci-dessous.



Cette flèche « qui descend » indique que f est strictement décroissante pour x dans l'intervalle [-2; 1].

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	2	↘	1	↗	

Ligne des valeurs de x

Ligne des valeurs de f(x)

Ce « -2 » dans la ligne des x à la verticale du « 2 » dans la ligne de f(x) indique que f(-2)=2.

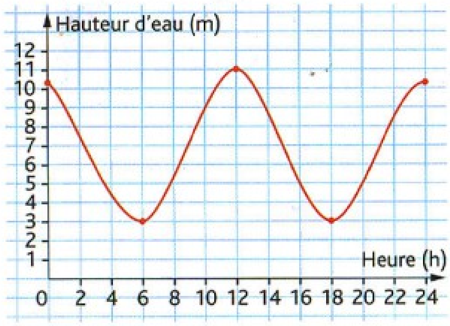
Source: Cours de Y. Angeli, divers manuels, mes cours des années précédentes...etc.

Source: Cours de Y. Angeli, divers manuels, mon cours des années précédentes...etc.

Table des matières

Introduction aux fonctions

Le graphique ci-dessous représente la hauteur d'eau dans le port de Saint-Malo pendant 24 heures.



1. Lors de cette journée, quelle était la hauteur d'eau à 6 heures ? à 12 heures ? à 22 heures ?
2. À quelles heures la hauteur d'eau était-elle de 6 mètres ?
3. Un bateau est entré dans le port entre 14 et 16 heures. Quelles sont les valeurs possibles pour son tirant d'eau (c'est-à-dire la hauteur de sa coque immergée) ?
4. Un bateau ayant un tirant d'eau de 7 mètres est entré dans le port ce jour-là. Quels sont les horaires possibles de son arrivée ?
5. Quelle a été la hauteur d'eau maximale dans le port ce jour-là ? et la hauteur d'eau minimale ?
6. Préciser deux plages horaires sur lesquelles la hauteur d'eau n'a jamais cessé de diminuer, puis deux autres sur lesquelles elle n'a jamais cessé d'augmenter.
7. On veut schématiser la courbe ci-dessus par un tableau qui décrit son comportement. Compléter ce tableau.

t	0	6	24
$h(t)$	10,35	3	

Reformuler les questions en utilisant les mots « image » et « antécédent ». ou « image de 2 » ? à traduire par une phrase en français.