Nombres relatifs et opérations | 4ème

Objectifs : *Liste à cocher au fur et à mesure de vos révisions*

- ☐ [5ème] Notion de nombre relatifs, opposé d'un nombre relatif ;
- ☐ [5ème] Classer des nombres relatifs, placer des nombres relatifs sur un axe gradué et placer dans un repère des points dont les coordonnées sont des nombres relatifs ;
- ☐ [5ème] Addition et soustraction de nombres relatifs ;
- ☐ [4ème] Suppression des parenthèses dans une somme algébrique (= écriture simplifiée d'une somme de relatifs). *Par exemple, savoir que* $(-2)+(-4)-(-7)=-2-4+7=1$.
- ☐ [4ème] Multiplication et division de nombre relatifs en écriture décimale ; Inverse d'un relatif ;
- ☐ [4ème] Enchaînement d'opérations comportant des nombre relatifs en respectant les priorités opératoires et écrire des expressions en utilisant correctement les parenthèses ;
- ☐ [4ème] *Addition, soustraction multiplication et division de nombre relatifs en écriture fractionnaire → Fait dans un autre chapitre*

Je me souviens : Règles de distributivité [5ème]

Distributivité. Quelque soient les nombres relatifs a , b et k

$$\boldsymbol{k\times(a+b)=k\times a+k\times b} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{k\times(a-b)=k\times a-k\times b}$$

$$k\times(a+b)\underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{\rightleftarrows}}k\times a+k\times b$$

Définitions.

- ***Développer*** une expression, c'est l'écrire sous forme d'une somme (ou d'une différence).
- ***Factoriser*** une expression, c'est l'écrire sous forme d'un produit (ou d'un quotient).

$$k\times(a-b)\underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{\rightleftarrows}}k\times a-k\times b$$

I. Additions et soustractions de nombres relatifs [5ème]

A. Notion de nombre relatif [5ème]

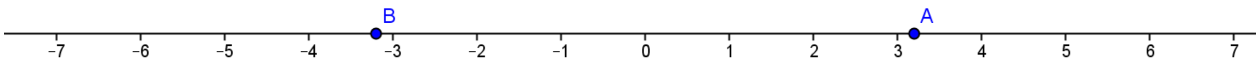
Exemples tirés de la vie courante :

- *Une température de* -25 *degrés Celsius (c'est-à-dire 25 degrés en dessous de zéro)*
- *Si vous avez perdu 3 billes à une partie, votre score à cette partie est de* -3.
- *Les numéros des étages pour les ascenseurs : Le niveau 0 est le rez de chaussée, le parking souterrain du niveau* -2 *est situé deux niveaux en-dessous du rez de chaussée.*

Vocabulaire :

- $+3{,}2$ est un ***nombre relatif positif*** dont la ***distance à zéro*** ou ***valeur absolue*** est $3{,}2$.
- $-3{,}2$ est un ***nombre relatif négatif*** dont la ***distance à zéro*** ou ***valeur absolue*** est $3{,}2$.

Illustration avec $+3{,}2$ et $-3{,}2$ sur une droite graduée, ce qui explique le choix du terme ***distance à zéro*** :



B. Somme de nombre relatifs [5ème]

■ Intuitivement :

▪ ***Méthode 1** : Penser que les nombres que l'on additionne sont des **scores de parties de poker**. Pour calculer* $(+3)+(-5)$, *je l'interprète comme le score après deux parties de poker où j'ai gagné 3 € à la première partie et j'ai perdu 5 € à la deuxième. En tout j'ai perdu 2 € donc* $(+3)+(-5)=(-2)$.

▪ ***Méthode 2 : Déplacement sur la droite graduée**. Penser que ajouter +5 correspond à un déplacement de 5 unités vers la droite et ajouter -5 correspond un déplacement de 5 unités vers la gauche. Pour calculer* $(+3)+(-5)$, *sur la droite graduée, je pars du point d'abscisse +3 et que je me déplace de 5 unités vers la gauche. J'arrive au point d'abscisse -2. Finalement,* $(+3)+(-5)=(-2)$.

■ On retrouve la règle vue en 5ème :

Comment additionner deux nombres relatifs ?

▪ Pour additionner deux nombres relatifs de *même signe*, on additionne leurs distances à zéro et on garde le signe commun.

▪ Pour additionner deux nombres relatifs de *signes contraires*, on soustrait la plus petite distance à zéro de la plus grande et on prend le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro.

Si on sait additionner des nombres relatifs avec les méthodes intuitives décrites ci-dessus, pas besoin d'apprendre la règle ci-contre.

C. Différence de nombres relatifs [5ème]

L'***opposé*** d'un nombre relatif est le nombre de signe *contraire* qui a la *même* distance à zéro.

Exemples : L'opposé de $+7$ *est* -7 *et l'opposé de* $-3{,}8$ *est* $+3{,}8$.

Propriété. Soustraire un nombre relatif, c'est additionner son opposé

Bref, toutes les soustractions peuvent être vues comme des additions et il n'y a donc rien à savoir de plus sur les soustractions.

En pratique, on convertit toutes les soustractions en additions puis on applique les règles d'additions.

Exemple : $4-(-5)-(+21)=4+(+5)+(-21)=-12$.

Soustraire -5 c'est additionner son opposé qui est $+5$.

D. Simplifications d'écriture [5ème et 4ème]

■ À chaque fois, on convertit toutes les soustractions en additions (de l'opposé) donc on obtient toujours une suite d'additions. Comme c'est lassant d'écrire tous ces signes d'additions et toutes ces parenthèses,

on décide de ***ne plus écrire ni les signe d'additions ni les parenthèses*** dans les sommes de relatifs.

Par exemple, l'écriture simplifiée de $(-2)+(-5)+(+47)$ *est* $-2-5+47$.

▪ Bien sûr, il faut commencer par convertir les toutes les soustractions en additions (de l'opposé) !

Par exemple, $(+52)+(-7)-(+23)-(-8)=(+52)+(-7)+(-23)+(+8)$ *donc son écriture simplifiée est* $52-7-23+8$.

▪ Remarque : $7-4$ *peut donc s'interpréter de plusieurs façons : La différence entre 7 et 4 (le « - » est alors interprété comme un signe de soustraction), ou comme* $(+7)+(-4)$ *ou encore comme* $(+7)-(+4)$. *Ceci ne pose aucun problème puisque ces trois calculs donnent le même résultat. L'interprétation la plus commode est* $(+7)+(-4)$*, c'est à dire celle d'une somme de nombres relatifs, voir le paragraphe « Propriétés de l'addition [5ème] » ci-dessous.*

■ On peut supprimer le signe $\times$ lorsqu'il est suivi d'une lettre ou d'une parenthèse.

Exemples : a est un relatif. $-3\times a=-3a$; $-2\times a\times 5=-10a$; $a\times(-4)=-4a$ *et non* $a-4$!

$-3\times(a+5)=-3(a+5)$.

E. Propriétés de l'addition [5ème]

Propriétés de l'addition. Dans une somme, on peut
- changer l'ordre des termes,
- regrouper des termes.

Cela permet parfois de faire les calculs astucieusement.

Exemple :
$$(+7)+(-2{,}4)+(+3)+(-1{,}6)=(+7)+(+3)+(-2{,}4)+(-1{,}6)$$
$$=[(+7)+(+3)]+[(-2{,}4)+(-1{,}6)]=(+10)+(-4)=6$$

En écriture simplifiée : $7-2{,}4+3-1{,}6=7+3-2{,}4-1{,}6=10-4=6$

À cause de ces propriétés bien commodes de l'addition, mieux vaut considérer les signes « - » comme les signes des nombres et pas comme des soustractions. Dans l'exemple, -2,4 est considéré comme un nombre négatif inclus dans une somme. Le « - » fait donc partie du nombre, il est donc « attaché » au nombre et il se déplace avec lui.

⚠ *Dans une différence, on ne peut PAS changer l'ordre :* $3-1=2\neq 1-3=-2$

II. Produit de nombre relatifs

Règle : Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie leurs distances à zéro et on trouve le signe du résultat grâce à la ***règle des signes*** :

- le produit de deux nombres relatifs de *même* signe est *positif* ;
- le produit de deux nombres relatifs de signes *contraires* est *négatif*.

Autrement dit: Pour multiplier des nombres relatifs, on s'occupe du signe et de la distance à zéro séparément :

1) *Le signe est donné par la règle des signes ;*

2) *La distance à zéro s'obtient en multipliant les distances à zéro (produit de nombres positifs, on sait faire)*

Plusieurs façons de retenir la règle des signes :

Dans le moyen mnémotechnique, « + » correspond à « **amis** » (c'est positif d'avoir des amis!)

« − » correspond à « **ennemis** »

Schématique	*À l'oral*	*Moyen mnémotechnique*
$+\times+=+$	« + » par « + » fait « + »	Les **amis** de mes **amis** sont mes **amis.**
$-\times-=+$	« − » par « − » fait « + »	Les **ennemis** de mes **ennemis** sont mes **amis.**
$+\times-=-$	« − » par « + » fait « − »	Les **ennemis** de mes **amis** sont mes **ennemis.**
$-\times+=-$	« + » par « − » fait « − »	Les **amis** de mes **ennemis** sont mes **ennemis.**

Cas particuliers : Quel que soit le nombre relatif a, $a\times1=1\times a=a$ et $a\times0=0\times a=0$.

Propriété. En multipliant un nombre relatif par – 1, on obtient son opposé.

Exemples : $-1\times3=-3$ *qui est bien l'opposé de* 3 *et* $(-1)\times(-3)=+3$ *qui est bien l'opposé de* -3.

Notation : L'opposé du nombre relatif a se note $-\boldsymbol{a}$. On a $(-1)\times a=a\times(-1)=-a$.

⚠ $-a$ *n'est pas forcément négatif. Par exemple pour* $a=-6$, *on a* $-a=-(-6)=+6$ *qui est positif.*

III. Quotient de nombre relatifs

Définition. [6ème] Si a est un nombre relatif quelconque et b un nombre relatif non nul, le ***quotient de a par b*** est le nombre qui multiplié par b donne a.

Autrement dit, c'est l'unique solution de l'équation $...\times b=a$.

On note ce quotient $a\div b$ ou $\frac{a}{b}$. *(* $\frac{a}{b}\times b=a$ *. Cela paraît normal, non?).*

Exemple : Le quotient de 28 par -4 *est l'unique solution de l'équation à trou* $....\times(-4)=28$.

C'est donc -7, *ce que l'on note* $\frac{28}{-4}=-7$. *(résultat sans surprise puisqu'un quotient correspond à une division)*

Remarque : $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$.

Définition. L'***inverse*** d'un nombre relatif non nul a est le quotient de 1 par a.

Autrement dit, c'est la solution de l'équation à trou $...\times a=1$. On le note $\frac{1}{a}$.

Exemples : L'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$, *l'inverse de* -7 *est* $\frac{1}{-7}$, *l'inverse de* $\frac{4}{5}$ *est* $\frac{5}{4}$ *et l'inverse de* $-\frac{4}{5}$ *est* $-\frac{5}{4}$.

⚠ *L'inverse et l'opposé, ce n'est pas la même chose!!! L'opposé de 3 est* -3 *mais l'inverse de 3 est* $\frac{1}{3}$.

⚠ *Le nombre zéro n'a pas d'inverse puisque l'équation* $...\times0=1$ *n'a pas de solution (et voilà pourquoi on ne peut pas diviser par 0 au cas où cette question vous hanterait depuis des années). Zéro est le seul nombre qui n'a pas d'inverse.*

Propriété. Diviser un nombre relatif non nul, c'est multiplier par son inverse. Autrement dit, si a est un nombre quelconque et b un nombre non nul, $a \div b = \dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$.

*Bref, toutes les divisions peuvent être vues comme des multiplications. En particulier on applique la **même règle des signes** et voilà pourquoi on dit « par » dans la règle des signes : cela peut aussi bien être « multiplié par » que « divisé par ». Je vous la réécris quand même ci-contre.*

$+ \div + = +$
$- \div - = +$
$+ \div - = -$
$- \div + = -$

Résumé : Comment diviser deux nombres relatifs ?

Méthode pour diviser des nombres relatifs : On s'occupe du signe et de la distance à zéro séparément :

1) *Le signe est donné par la règle des signes ;*

2) *La distance à zéro s'obtient en divisant les distances à zéro (quotient de nombres positifs, on sait faire)*

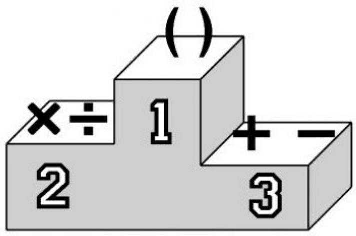
IV. Enchaînement d'opérations : Priorités de calcul [5ème]

On retrouve bien sûr les règles vues en 5ème :

Illustration : Podium

Règles de priorité de calcul

- Dans une suite d'opérations avec des nombres relatifs, on effectue dans l'ordre suivant :
  - d'abord les calculs entre parenthèses *(en commençant par les parenthèses les plus intérieures)*
  - puis les multiplications et divisions
  - et enfin les additions et soustractions.
- Lorsqu'il y égalité de priorités, on effectue les calculs de la gauche vers la droite.



Rappel. Les barres de fractions sont en fait des parenthèses cachées. Par exemple, $\dfrac{3+6\times 2}{10+3}$ veut dire $(3+6\times 2)\div(10+3)$. On utilise donc la règle sur les calculs avec parenthèses : On calcule le numérateur et le dénominateur **avant** de simplifier la fraction ou de calculer le quotient.

Table des matières

I. Additions et soustractions de nombres relatifs [5ème] 1
A. Notion de nombre relatif [5ème] 1
B. Somme de nombre relatifs [5ème] 1
C. Différence de nombres relatifs [5ème] 2
D. Simplifications d'écriture [5ème et 4ème] 2
E. Propriétés de l'addition [5ème] 2
II. Produit de nombre relatifs 3
III. Quotient de nombre relatifs 3
IV. Enchaînement d'opérations : Priorités de calcul [5ème] 4

Cours à coller page de gauche et page de droite, mettre :

- Un exemple d'utilisation du théorème de Pythagore avec un modèle de rédaction.
- Activ 5 : Un exemple d'utilisation de la contraposée du théorème de Pythagore avec une phrase à compléter du type « *Si le triangle était rectangle, alors ...* »
- Un exemple d'utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore avec un modèle de rédaction.

Exercice 1. Racines carrées à l'ardoise [juste après activité et définition]

1) Dessiner sur votre cahier un tableau avec x sur une ligne et x^2 sur l'autre et y mettre les entiers de 0 à 15 et leur carrés. [*même tableau au tableau*]

2) [*sans calculatrice*] Racine carrée de 49 ? de 4 ?...etc
À intercaler avec des questions sur les carrés : $\sqrt{100}$ puis 100^2 , $\sqrt{4}$ puis 4^2 ...

3) [*sans calculatrice*] Encadrement d'amplitude une unité de $\sqrt{32}$? … etc.

4) [*avec calculatrice*] Encadrement d'amplitude 0,01 de $\sqrt{32}$? … etc

Exercice 2. Racines carrées, ardoise [juste après activité et def]
Dessiner au tableau un tableau avec x sur une ligne et x^2 sur l'autre et y mettre les entiers de 0 à 15 et leur carrés ?

1) Racine carrée de 49 ? de 4 ?...etc

2) En donner des valeurs approchées à 1 mm près.
  a) comprise entre 50 et 100 km ;
  b) supérieure à 300 km.

Exercice 3. E est le milieu de [AB], D appartient à [AC].

1) Quelle conjecture peut-on faire sur la position du point D sur [AC] ?

2) Démontrez votre conjecture.

Aide : On pourra commencer par montrer que $\widehat{EDB}=\widehat{DBC}$ .t du rayon de son cercle inscrit.

Quelques triplets pythagoriciens (et leurs variantes) pour créer des exercices dans la seconde.

3	4	5
0,3	0,4	0,5
6	12	15
$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$

5	12	13
2,5	6	6,5
20	21	29
8	15	17

Et aussi : (11, 60, 61) (13, 84, 85) (12, 35, 37) (16, 63, 65) (36, 77, 85) (8, 15, 17) (9, 40, 41) (33, 56, 65) (39, 80, 89) (7, 24, 25) (28, 45, 53) (48, 55, 73) (65, 72, 97)