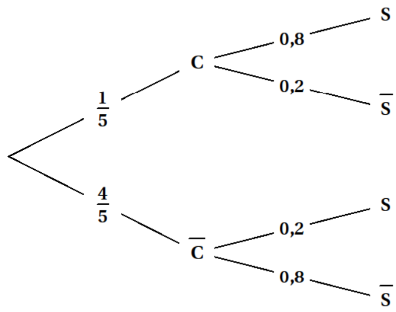
Bac Blanc *Éléments de correction de l'exercice sur les probabilités*

Partie A



1) $p(\overline{C})=1-p(C)=\dfrac{4}{5}$ et $p_{\overline{C}}(S)=p(T_d\leq -4)=0{,}2$

En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$p(S)=p_C(S)\times p(C)+p_{\overline{C}}(S)\times p(\overline{c})=\dfrac{8}{25}$

2) $p_S(C)=\dfrac{p(S\cap C)}{p(S)}=\dfrac{0{,}8\times\dfrac{1}{5}}{\dfrac{8}{25}}=\dfrac{1}{2}$

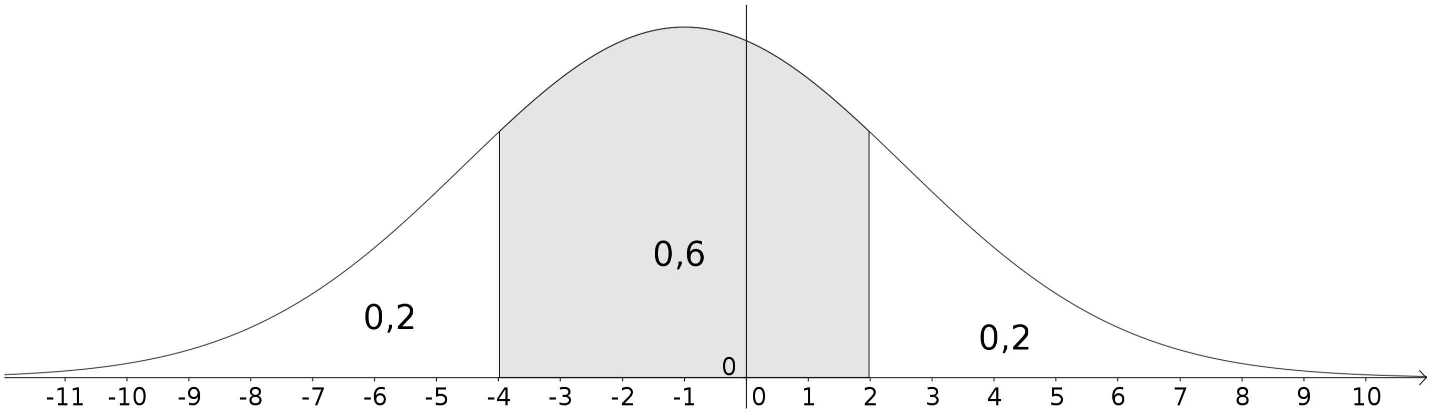
3) a) On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de jours couverts. X suit la loi binomiale $B\left(14\,;\dfrac{1}{5}\right)$.

$E(X)=14\times\dfrac{1}{5}=2{,}8$

b) $p(X=7)=\dbinom{14}{7}\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^7\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^7\approx 0{,}01$

c) $p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^{14}\approx 0{,}96$

Partie B



Par symétrie autour de la droite $x=\mu$ on a :

$p(T_d\geq 2)=p(T_d\leq -4)$

On en déduit $p(Td\leq 2)=0{,}8$

Partie C

1) $Z=\dfrac{T_c+5}{\sigma}$ d'où $T_c\leq -4\Leftrightarrow Z\leq\dfrac{1}{\sigma}$

2) En utilisant la calculatrice (Z suivant la loi normale centrée réduite), on obtient $\dfrac{1}{\sigma}\approx 0{,}8416$ d'où $\sigma\approx 1{,}188$.

3) D'après le cours $p(T_c\in[-5-1{,}96\sigma\,;-5+1{,}96\sigma])\approx 0{,}95$.

L'intervalle cherché est donc approximativement [-7,3 ; -2,7]

CORRIGÉ DU BAC BLANC - MATHÉMATIQUES S

EXERCICE 2

① proposition 1 : déterminons $\lim_{x \to +\infty} g(x)$. Nous savons que $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
nous en déduisons successivement $1 \leqslant 2+\cos x \leqslant 3$ puis $e^{1-x} \leqslant (2+\cos x)e^{1-x} \leqslant 3e^{1-x}$.
Posons $X = 1-x$; si $x \to +\infty$ alors $X \to -\infty$ et donc $\lim_{x \to +\infty} e^{1-x} = \lim_{X \to -\infty} e^{X} = 0$.
Donc d'une part, $e^{1-x} \leqslant g(x) \leqslant 3e^{1-x}$ et d'autre part, $\lim_{x \to +\infty} e^{1-x} = \lim_{x \to +\infty} 3e^{1-x} = 0$.
Donc, en vertu du théorème des gendarmes, on en déduit $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$; la courbe représentative admet donc une asymptote d'équation y=0. **proposition VRAIE**

proposition 2 : nous savons que
$\forall x \in \mathbb{R}$: $1 \leqslant 2+\cos x \leqslant 3$ donc $2+\cos x > 0$; de plus $e^{1-x} > 0$ donc $g(x) > 0$.
Donc la courbe est bien au-dessus de l'axe des abscisses **proposition VRAIE**

② proposition 3 : Soit T la tangente en $x = \frac{3}{2}$.

Son équation est $T : y = h'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + h\left(\frac{3}{2}\right)$ donc, si x=0, alors $y = h'\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right) + h\left(\frac{3}{2}\right)$

de plus, $h'\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{2e^{\frac{3}{2}} \times \frac{3}{2} - e^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3}} = \dfrac{(3-1)e^{\frac{3}{2}}}{2 \times \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}}$ et $h\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{\frac{3}{2}}$

donc $y = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{\frac{3}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} e^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{\frac{3}{2}} = 0$ **proposition VRAIE**

proposition 4 : Résolvons $h'(x) = 0$.
Alors, $2e^x x - 1e^x = 0$, c-à-d $(2x-1)e^x = 0$ puis $2x - 1 = 0$ et enfin $x = \frac{1}{2}$

or, $h\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2e} \approx 2{,}33164... \neq \frac{7}{3} \approx 2{,}333333...$ Le minimum de h est proche de $\frac{7}{3}$ mais non égal. **proposition FAUSSE**

③ proposition 5 : Soit A l'aire cherchée. Alors $A = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| + \left|\int_1^3 f(x)\,dx\right|$ (en UA) .
Or, la calculatrice nous donne $\int_0^1 f(x)\,dx \approx -0{,}471518$ et $\int_1^3 f(x)\,dx \approx 0{,}674925$
Donc $A \approx 0{,}471518 + 0{,}674925 \approx 1{,}146443$ UA; Or, 1 UA= $2 \times 5 = 10\,\text{cm}^2$; Donc $A \approx 11{,}464\ \text{cm}^2$
proposition FAUSSE
On pouvait aussi minorer l'aire par un triangle judicieusement choisi.

CORRIGÉ DU BAC BLANC - MATHÉMATIQUES S

Correction exercice 3 : complexe.

Partie A

1. $z_0 = 1 + i$

   Avec $a_0 = 1 \; et \; b_0 = 1$

2. $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{3} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} i$

   Avec $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3} \; et \; b_1 = \frac{1}{3}$

3. $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3} = \frac{a_n + ib_n + \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}}{3} = \frac{a_n + \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}}{3} + \frac{b_n}{3} i$

   Avec $a_{n+1} = \; et \; b_{n+1} =$

4. $(b)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme : 1

Donc: $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout n entier naturel.

On en déduit : $\lim_{n \to +\infty}(b_n) = 0$

Partie B :

Variables : a et b sont des nombres réels
k et n sont des nombres entiers

Initialisation : Affecter à a la valeur **1**
Affecter à b la valeur **1**.

Traitement : Entrer la valeur n
Pour k allant de **1** à **n**.
Affecter à a la valeur . $\frac{\mathbf{a} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}}{\mathbf{3}}$...
Affecter à b la valeur . $\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{3}}$

Fin pour

Sortie : Afficher **a**

Il semble que la suite $(a)_n converge \; vers \; 0$

CORRIGÉ DU BAC BLANC - MATHÉMATIQUES S

Partie C

1. $|z_{n+1}| = \left|\frac{z_{n+1}+|z_n|}{3}\right| \leq \frac{1}{3}\left(|z_n| + |z_n|\right)$ d'où $|z_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|z_n|$

2.

a.

Variables : a, b et u sont des nombres réels
k et n sont des nombres entiers

Initialisation : Affecter à a la valeur **1**
Affecter à b la valeur **1**
Afecter à u la valeur

Traitement : Entrer la valeur n
Pour k allant de **1** à **n**.
Affecter à a la valeur . $\mathbf{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{3}}$...
Affecter à b la valeur . $\boldsymbol{\frac{b}{3}}$
Affecter à u la valeur $\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$

fin pour
Sortie : Afficher **u**

b.

Initialisation : $u_0 = \sqrt{2}$ donc $u_0 \leq \sqrt{2}$ La propriété est donc vraie pour n= 0

Hérédité : On suppose que $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

$$u_{n+1} = |z_{n+1}|$$

On a : $|z_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|z_n|$ or on a supposé que $|z_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$ d'où $|z_{n+1}| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

On a bien $|z_{n+1}| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$

On a démontré par récurrence que la propriété est vraie pour tout n entier naturel

Donc : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

D'après le théorème d'encadrement, on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

3 . On déduit que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

CORRIGÉ DU BAC BLANC - MATHÉMATIQUES S

CORRECTION DE L'EXERCICE 3 DE SPÉCIALITÉ

PARTIE A

1. On a : $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \\ u_n = 1u_n + 0u_{n-1} \end{cases}$ de ce fait $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$ et ainsi $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a. À l'aide de la calculatrice, on a : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. b. **C'EST UNE QUESTION DE COURS ...**

2. c. D est une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

3. $C_{n-1} = A^{n-1}C_0$ d'où $u_n = 8\left(-2^n + 3^n\right) + 3\left(3 \times 2^n - 2 \times 3^n\right) = 2^n + 2 \times 3^n$.

PARTIE B

Les cellules grisées correspondent aux nombres affichés par l'algorithme

i	2	**3**	**4**	**5**	**6**
c	3	8	22	62	178
a	8	22	62	178	518
b	22	62	178	518	1522
d	1	6	3	0	3

PARTIE C

1. Calcul de la valeur de v_{2014}

$2014 \equiv 1(3)$ et donc d'après le tableau $2^{2014} \equiv 2(7)$

De même $2014 \equiv 4(6)$ et donc d'après le tableau $3^{2014} \equiv 4(7)$

Ainsi $v_{2014} \equiv 2 + 2 \times 4(7)$ d'où $v_{2014} = 3$.

2. On reproduit et complète le tableau donné dans l'énoncé :

n	0	1	2	3	4	5	6
reste modulo 7 de 2^n	1	2	4	1	2	4	1
reste modulo 7 de 3^n	1	3	2	6	4	5	1
reste modulo 7 de $2^n + 2 \times 3^n$	$1+2\times1=3$ 3	$2+2\times3=8$ 1	$4+2\times2=8$ 1	$1+2\times6=13$ 6	$2+2\times4=10$ 3	$4+2\times5=14$ 0	$1+2\times1=3$ 3

On en déduit que $2^n + 2 \times 3^n$ est divisible par 7 lorsque $n \equiv 5(7)$

ABCDEFGH est un cube. O est le centre de la face ABCD. On se place dans le repère orthonormé direct $(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}};\overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

PARTIE A

Dans le repère $(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}};\overrightarrow{\mathrm{AE}})$, on a les coordonnées suivantes :

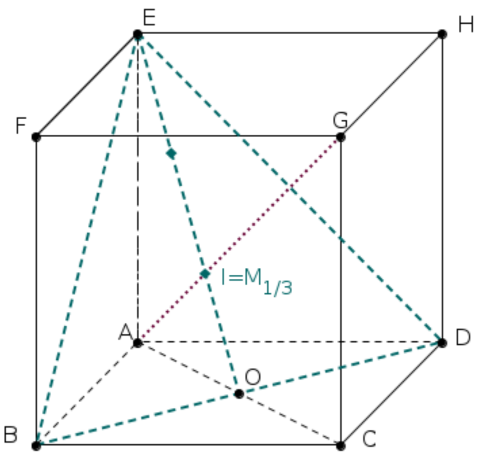
$\mathrm{A}(0;0;0)$ $\mathrm{B}(1;0;0)$ $\mathrm{C}(1;1;0)$ $\mathrm{D}(0;1;0)$ $\mathrm{E}(0;0;1)$ $\mathrm{G}(1;1;1)$ $\mathrm{O}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$

1) Les carrés ABCD, ABFE et ADHE ont tous les trois pour côté 1. Les segments [BD], [BE]et [ED], qui sont leurs diagonales respectives, ont donc toutes les trois la même longueur. On en déduit que <u>BED est un triangle équilatéral</u>.

<u>Remarque</u> : On pouvait aussi dire que ces trois carré ont pour côté 1 donc leurs diagonales ont pour longueur commune $\sqrt{2}$.

2) Avec $\mathrm{O}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ et $\mathrm{E}(0;0;1)$, on a $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ se traduit en termes de coordonnées par $\begin{cases}x_I-1/2 &=-1/6\\ y_I-1/2 &=-1/6\\ z_I &= 1/3\end{cases}$. On résout[1] et on obtient bien $\boxed{\mathrm{I}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)}$.

3) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On en déduit $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ donc <u>les points A, I et G sont alignés</u>.



PARTIE B

1) ▪ *Déterminons* $\mathrm{M}_{1/3}$: Lorsque $k=\frac{1}{3}$, la condition $\overrightarrow{\mathrm{AM}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ devient $\overrightarrow{\mathrm{AM}_{1/3}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$. Or on a vu à la question A-3) que $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ d'où $\boxed{\mathrm{M}_{1/3}=I}$.

▪ *Déterminons* $\mathrm{N}_{1/3}$: I est un point de (BED) donc $(\mathrm{P}_{1/3})$, le plan parallèle à (BED) passant par I, est (BED) lui même. $\mathrm{N}_{1/3}$ est donc le point intersection de (BED) avec (BC) : C'est B. $\boxed{\mathrm{N}_{1/3}=B}$

2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{AG}}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_{M_k}\\y_{M_k}\\z_{M_k}\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\mathrm{M}_k(k;k;k)}$

3) $\mathrm{B}(1;0;0)$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}x=1\\y=0+t\\z=0\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (BC).

4) a) $(\mathrm{P}_{1/2})$ est le plan parallèle à (BED) passant par $\mathrm{M}_{1/2}$. Comme ce plan est parallèle à (BED), $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$, qui forment un couple de vecteurs directeurs de (BED), forment aussi un couple de vecteurs directeurs de $(\mathrm{P}_{1/2})$.

$M_{1/2}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}x=1/2-u-v\\y=1/2\quad\quad +v\\z=1/2+u\end{cases}$ avec $u\in\mathbb{R}$ et $v\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de $(\mathrm{P}_{1/2})$.

---

[1] *mais si ! aussi incroyable que cela puisse paraître à certains d'entre vous, « on résout » s'écrit avec un « t » à la fin. Je profite de cette digression orthographique pour rajouter que « milieu » s'écrit avec un seul « ℓ ».*

b) En déduire les coordonnées du point $N_{1/2}$

- $N_{1/2}$ est le point intersection du plan $(P_{1/2})$ et de la droite (BC). Pour le déterminer, on résout le système

$$\begin{cases} 1/2-u & -v & = & 1 & & (L_1) \\ 1/2 & +v & = & & t & (L_2) \\ 1/2+u & & = & 0 & & (L_3) \end{cases}$$

La ligne (L_3) donne $u=-\dfrac{1}{2}$ et $(L_1)+(L_2)+(L_3)$ donne $\dfrac{3}{2}=1+t$ càd $t=\dfrac{1}{2}$. En reportant cette valeur dans (L_2), on obtient $\dfrac{1}{2}+v=\dfrac{1}{2}$ soit $v=0$.

- En remplaçant *u, v* et *t* par les valeurs trouvées, on vérifie que le système est compatible.
- En utilisant la représentation paramétrique de (BC) dans laquelle on remplace t par 1/2, on obtient que $N_{1/2}$ a pour coordonnées $\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$. $\boxed{N_{1/2}\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)}$

5) Dans cette question, on admet que N_k a pour coordonnées[2] (1;3k − 1;0) .

a) Montrer que $M_kN_k=\sqrt{6k^2-6k+2}$.

Sachant que $N_k(1;3k-1;0)$ et $M_k(k;k;k)$, on a $M_kN_k=\sqrt{(1-k)^2+(2k-1)^2+k^2}=\sqrt{6k^2-6k^2+2}$.

b) Déterminer la valeur de k pour laquelle la distance M_kN_k est minimale.

La distance M_kN_k est minimale ssi[3] son carré est minimal. Notons son carré $f(k)$. On a $f(k)=6k^2-6k+2$. C'est un trinôme du second degré en k de dérivée $f'(k)=12k-6$.
D'après le tableau de variation ci-contre f est minimale lorsque $k=2$.

$\boxed{\text{La distance } M_kN_k \text{ est minimale lorsque } k=\frac{1}{2}.}$

Tableau de variations de f :

k	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de f '(k)		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$		$\nearrow$	

[2] *Comme on est super malins, on en profite pour vérifier les coordonnées trouvées pour* $N_{1/2}$.

[3] *ssi = « si et seulement si »*