Manipulations d'Inégalités | A.P. en 2nde

Rappel : Fonctions croissantes et décroissante

▪ Une fonction f est ***croissante*** sur un intervalle I ssi quels que soient les nombres a et b appartenant à I, on a : si $a<b$ alors $f(a)\leqslant f(b)$. « *Les fonctions croissantes conservent les inégalités(= les laissent dans le même sens)* ».

▪ Une fonction f est ***décroissante*** sur un intervalle I ssi quels que soient les nombres a et b appartenant à I, on a : si $a<b$ alors $f(a)\geqslant f(b)$. « *Les fonctions décroissantes retournent les inégalités* ».

Rappel : Règles de manipulation des inégalités

	La règle	***Autre formulation possible de cette règle en terme de fonction croissante ou décroissante***
R1.	Si on **ajoute** (ou soustrait[1]) le même nombre (positif ou non) aux deux membres d'une inégalité, l'inégalité est conservée.	La fonction $x\mapsto x+k$ (càd la fonction qui ajoute la constante k) est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
R2.	Si on **multiplie** (ou divise[2]) les deux membres d'une inégalité le même nombre **positif**, l'inégalité est conservée.	Si $k>0$, la fonction $x\mapsto kx$ (càd la fonction qui multiplie par la constante k) est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
R3.	Si on **multiplie** (ou divise) les deux membres d'une inégalité le même nombre **négatif**, l'inégalité est **retournée**.	Si $k<0$, la fonction $x\mapsto kx$ (càd la fonction qui multiplie par la constante k) est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
R4.	Deux nombres **positifs** sont rangés dans le **même** ordre que leurs **carrés**.	La fonction $x\mapsto x^2$ (càd la fonction qui met au carré) est **croissante** sur $[0,+\infty[$.
R5.	Deux nombres **négatifs** sont rangés dans l'ordre **inverse** de leurs **carrés**.	La fonction $x\mapsto x^2$ (càd la fonction qui met au carré) est **décroissante** sur $]-\infty;0[$.
R6.	Deux nombres **positifs** sont rangés dans l'ordre **inverse** de leurs **inverses**.	La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ (càd la fonction inverse) est **décroissante** sur $]0,+\infty[$.
R7.	Deux nombres **négatifs** sont rangés dans l'ordre **inverse** de leurs **inverses**.	La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ (càd la fonction inverse) est **décroissante** sur $]-\infty;0[$.
R8.	On peut toujours **ajouter** des inégalités membres à membre.	
R9.	On peut **multiplier** des inégalités membres à membre à condition que tous les membres soient **positifs.**	

☐ Exercice MI 1. Complétez les inégalités et indiquez la règle utilisée.

1) Si $x>3$ alors $x+2>$ ..... d'après la règle ......

2) Si $x<5$ alors $-3x$ .... d'après la règle ......

3) Si $x<5$ alors $3x$ .... d'après la règle ......

4) Si $x>3$ alors $\frac{1}{x}$ .... d'après la règle ...... d'où $-\frac{2}{x}$ ....d'après la règle ......

5) Si $2<x<5$ alors ..... $\frac{1}{x}$ .... d'après la règle ......

6) Si $-25<x<-9$ alors ..... $\frac{1}{x}$ .... d'après la règle ......

7) Si $x>\frac{1}{2}$ alors x^2 .... d'après la règle ...... d'où x^2-16 ...... d'après la règle .....

8) Si $1<x<3$ alors ..... $x-8$ .... d'après ...... d'où ...... $(x-8)^2$ ...... d'après .....

[1] *La règle pour la soustraction est une conséquence de celle pour l'addition car « soustraire = ajouter l'opposé ».*
[2] *La règle pour la division est une conséquence de celle pour la multiplication car « Diviser = multiplier par l'inverse ».*

☐ Exercice MI 2. Complétez les inégalités en justifiant.

Le tableau de variations d'une fonction *f* est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f(x)$	20	↘	-56	↗	-2	↘	-10

Compléter si possibles les inégalités et justifier par une phrase du type « car la fonction .... est croissante (décroissante) sur ...... »

1) -8 . . . . . -5 donc $f(-8)$ . . . . . . $f(-5)$ car . . . .

2) 9 . . . . . $13{,}2$ donc $f(9)$ . . . . . $f(13{,}2)$ car . . . .

3) $-3{,}15$ . . . . . $-3{,}2$ donc $f(-3{,}15)$ . . . . . $f(-3{,}2)$ car . . . .

4) -2 . . . . . -5 donc $f(-2)$ . . . . . $f(-5)$ car . . . .

5) -8 . . . . . -5 donc $(-8)^2$ . . . . . . $(-5)^2$ car . . . .

donc $f((-8)^2)$ . . . . . . $f((-5)^2)$ car . . . .

6) -8 . . . . . -5 donc $\frac{1}{-8}$ . . . . . . $\frac{1}{-5}$ car . . . .

donc $f\left(-\frac{1}{8}\right)$ . . . . . . $f\left(-\frac{1}{5}\right)$ car . . . .

☐ Exercice MI 3. Complétez les inégalités en justifiant.

Le tableau de variations d'une fonction *f* est donné ci-dessous :

x	-100		-2		3		100
$f(x)$	1/8	↗	2	↘	-4	↗	-2

On connaît de plus certaines valeurs de f :

x	*-6*	*-5*	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
f(x)	*1/6*	*1/5*	*1/4*	*1*	*2*	*1*	*-2*	*-2,4*	*-3*	*-4*	*-3,8*	*-3,5*	*-3,4*	*-3,2*	*-3*	*-2,9*

Compléter et justifier

1) Si $-2 \leqslant x \leqslant 3$ alors . . . . $\leqslant f(x) \leqslant$ . . . . car . . . .

2) Si $-3 \leqslant x \leqslant 3$ alors . . . . $\leqslant f(x) \leqslant$ . . . .

3) $-6{,}3$ . . . . . $-6{,}27$ donc $f(-6{,}3)$ . . . . . $f(-6{,}27)$ car . . . .

4) -2 . . . . . -5 donc $f(-2)$ . . . . . $f(-5)$ car . . . .

5) -8 . . . . . -5 donc $(-8)^2$ . . . . . . $(-5)^2$ car . . . .

donc $f(-8)$ . . . . . . $f(-5)$ car . . . .

6) -8 . . . . . -5 donc $\frac{1}{-8}$ . . . . . . $\frac{1}{-5}$ car . . . .

donc $f\left(-\frac{1}{8}\right)$ . . . . . . $f\left(-\frac{1}{5}\right)$ car . . . .