Fonctions trigonométriques | A.P. en T.S.

En terminale, ce qu'il y a de nouveau par rapport à la première est essentiellement ceci :

Théorème 1:

■ Si x est un réel ou un angle exprimé en radians, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.

■ Et s'il y a autre chose que x dans la fonction?

Si la fonction u est dérivable (et exprimée en radians) alors la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(u(x))$ est la fonction $x \mapsto \underbrace{-\sin}_{\text{dérivée de la fonction extérieure}} (\underbrace{u(x)}_{\text{fonction intérieure inchangée}}) \times \underbrace{u'(x)}_{\text{dérivée de la fonction intérieure}}$

et la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(u(x))$ est la fonction $x \mapsto \underbrace{\cos}_{\text{dérivée de la fonction extérieure}} (\underbrace{u(x)}_{\text{fonction intérieure inchangée}}) \times \underbrace{u'(x)}_{\text{dérivée de la fonction intérieure}}$

On retient : $(\cos u)' = (-\sin u) \times u'$ et $(\sin u)' = (\cos u) \times u'$ [sinus est toujours sympa]

Savoir-faire 2. Comment vérifier l'expression d'une dérivée avec un logiciel de calcul formel ?

Avec Geogebra 4, pour obtenir l'expression de la dérivée de $f(x) = \cos(7x)$, tapez dans la ligne de saisie $f(x) = \cos(7x)$ puis tapez dans la ligne de saisie $f'(x) = Dérivée[f]$ (Avec le D majuscule et l'accent sur le é) et vous aurez l'expression de la dérivée dans la colonne de gauche (colonne « algèbre »)

☐ Exercice TRIGO 1. Complétez le tableau suivant. Vous vérifierez l'expression trouvée pour la dérivée avec Geogebra (voir savoir-faire ci-dessous)

Fonction	**1)** $f(x) = \cos(3x)$	**2)** $g(x) = \cos\left(\frac{3}{x}\right)$	**3)** $h(x) = \sin^2 x$
Domaine de définition			
Dérivée			
Dérivée cohérente avec logiciel de calcul formel ?			
Périodique ? Si oui, meilleure période ?			

☐ Exercice TRIGO 2.

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \sin(2x) + 2\cos(x)$

1) Précisez la période de f

2) Montrer que le point de la courbe de f d'abscisse $\pi/2$ en est centre de symétrie.

Sur quel intervalle allez-vous étudier f ?

3) Calculer f', et prouver que pour tout réel x, $f'(x) = -2(2\sin x - 1)(1 + \sin x)$

En déduire les variations de f.

4) Tracer la courbe de f dans un repère dont l'unité est laissée à votre sagesse.

5) Donner le sens de variation de la fonction g définie sur $[\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ par

$g(x) = 2x - \cos(2x) + 4\sin(x)$ (on justifiera avec soin).

☐ Exercice TRIGO 3. On veut étudier l'existence et le nombre d'extremum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2\sin x$. Pour cela on étudie d'abord la fonction f' dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

1) Étude de f' :

a) Vérifier que $f'(x)=2(x-\cos x)$ et étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$.
b) Préciser les limites de f' en $+\infty$ et $-\infty$.

2) Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$, notée α . Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

3) Donner le signe de f' sur $\mathbb{R}$. En déduire le tableau de variations de f et justifier l'existence d'un seul minimum m pour f.

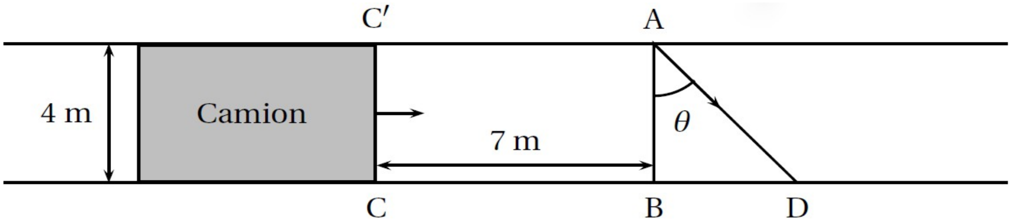
4) Montrer que m vérifie $m=\alpha^2-2\sqrt{1-\alpha^2}$.

☐ Exercice TRIGO 4. Lapin et camion [Baccalauréat]

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à . . . 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta=\widehat{BAD}$ avec $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ (en radians).



1) Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

2) On pose $f(\theta)=\frac{7}{2}+2\tan\theta-\frac{4}{\cos\theta}$

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta)>0$.

3) Conclure.

Rappel : *La fonction* $x\longmapsto \tan x$ *est dérivable sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ *et a pour dérivée la fonction* $x\longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$.