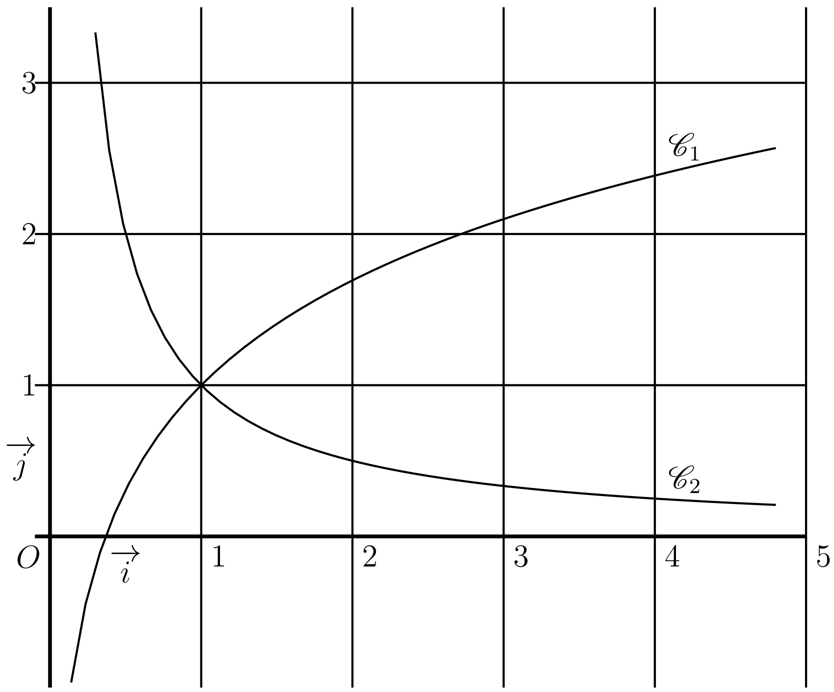
EXERCICE 1 (10 points)

(Commun à tous les candidats)

A.P.T.S 10

Partie I

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$.



On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$
- la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$
- la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est

• 0 • $+\infty$ • On ne peut pas conclure

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est

• 0 • $0,2$ • On ne peut pas conclure

3. En $+\infty$, $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote oblique :

• Oui • Non • On ne peut pas conclure

4. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

•

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	+

•

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	$-$

•

x	0	1	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖ +	0	$-$

Partie II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0, +\infty[$.

4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1, +\infty[$ qu'on note α.

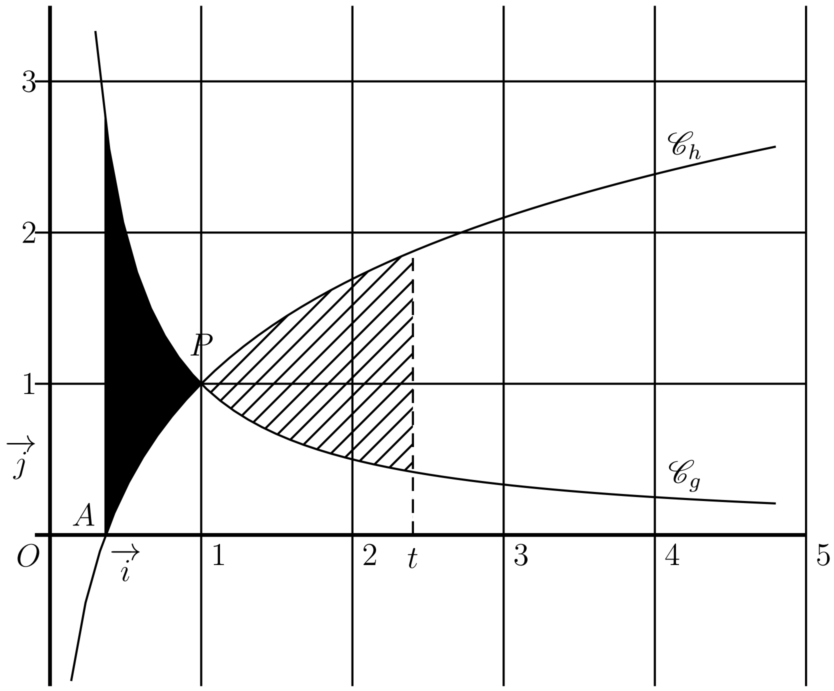
7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Partie III

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x) + 1.$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonctions g et h.



1. A est le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_h$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.

2. P est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$. Justifier que les coordonnées du point P sont $(1, 1)$.

3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_g, \mathscr{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = 1$ (domaine grisé sur le graphique).

a. Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie **II**.

b. Montrer que $\mathscr{A} = 1 - \dfrac{1}{e}$.

4. Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1, +\infty[$. On note $\mathscr{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1, x = t$ et les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ (domaine hachuré sur le graphique).

On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathscr{A} = \mathscr{B}_t$.

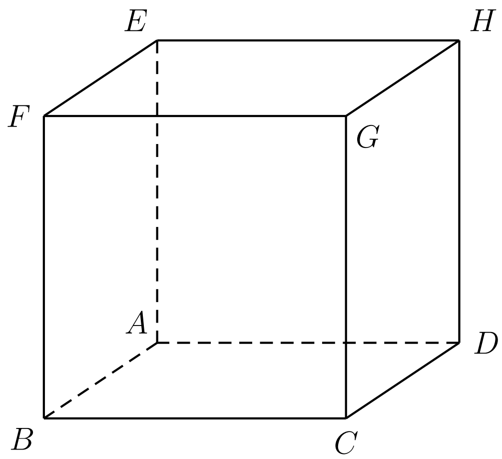
a. Montrer que $\mathscr{B}_t = t\ln(t) - \ln(t)$.

b. Conclure.

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$. . On considère les points $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $L(a; 1; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

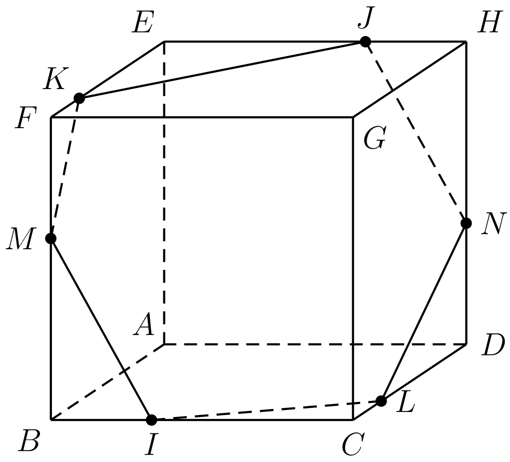
Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube $ABCDEFGH$ telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

a) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(8; 9; 5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
b) En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
c) En déduire les coordonnées des points M et N.

Corrigés
APTS 10

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Pondichéry

EXERCICE 1

Partie I

1. B

2. A

3. C

4. C

1) La fonction f_2 est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = +\infty$.

2) La fonction f_2 est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$

3) On ne peut pas conclure car par exemple les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$ ont un graphe ayant l'allure de $\mathscr{C}_1$, mais seule la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$ admet une asymptote oblique.

4) $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_1$ sur $]0,1[$, strictement au-dessous sur $]1,+\infty[$ et enfin, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en leur point d'abscisse 1. Donc le tableau de signe de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Partie II

1) Limite en 0. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty.}$$

Limite en $+\infty$. Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f(x) = \ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$. Par suite,

$$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Donc, la fonction f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ puis la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) On note tout d'abord que $f(1) = \ln(1) + 1 - 1 = 0$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, si x est un réel tel que $0 < x < 1$, on a $f(x) < f(1)$ ou encore $f(x) < 0$. Si x est un réel tel que $x > 1$, on a $f(x) > f(1)$ ou encore $f(x) > 0$. On résume ces résultats dans un tableau.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

4) La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = f(x).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

5) La fonction F est dérivable sur $[1, +\infty[$ et sa dérivée, à savoir f, est strictement positive sur $]1, +\infty[$ d'après la question 3). Donc, la fonction F est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

6) La fonction F est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc pour tout réel k de l'intervalle $\left[F(1), \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)\right[$, l'équation $F(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[1, +\infty[$.
Or, $F(1) = 0$ et donc $F(1) < 1 - \frac{1}{e}$ et d'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1)\ln(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) > 1 - \frac{1}{e}$.
Ainsi, $1 - \frac{1}{e} \in \left[F(1), \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)\right[$ et donc l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une solution et une seule, notée α, dans $[1, +\infty[$.

7) $F(\alpha) = 1 - \frac{1}{e} = 0,63\ldots$ Ensuite, $F(1,9) = 0,57\ldots$ et $F(2) = 0,69\ldots$. Donc $F(1,9) < F(\alpha) < F(2)$. Puisque la fonction F est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{1,9 < \alpha < 2.}$$

Partie III

1) Soit x un réel strictement positif.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{\text{Le point } A \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{1}{e}, 0\right).}$$

2) Soit x un réel strictement positif.

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

D'après l'étude du signe de la fonction f effectuée à la question II.3), l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule à savoir $x = 1$. Comme $g(1) = h(1) = 1$,

$$\boxed{\text{le point } P \text{ a pour coordonnées } (1, 1).}$$

3) (a) Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a $g(x) - h(x) = -\ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = -f(x)$. D'après la question II.3), la fonction f est négative sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et donc la fonction $g - h$ est positive sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Par suite,

$$\mathscr{A} = \int_{1/e}^{1} (g(x) - h(x))\, dx = \int_{1/e}^{1} (-f(x))\, dx.$$

(b) D'après la question II.4), on en déduit que

$$\mathscr{A} = [-F(x)]_{1/e}^{1} = -F(1) + F\left(\frac{1}{e}\right) = -0 + \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln(e) + \ln(e) = 1 - \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 1 - \frac{1}{e}.}$$

4) a) Soit t un réel strictement supérieur à 1. Dans ce cas, pour tout réel x de $[1, t]$, on a $h(x) - g(x) = f(x) \geqslant 0$. Par suite,

$$\mathscr{B}_t = \int_1^t (h(x) - g(x))\ dx = \int_1^t f(x)\ dx = [F(x)]_1^t = F(t) - F(1) = F(t) = t\ln(t) - \ln(t).$$

(b) Soit $t \geqslant 1$. D'après la question II.6),

$$\mathcal{B}_t = \mathscr{A} \Leftrightarrow F(t) = 1 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow t = \alpha.$$

Il existe un réel t et un seul tel que $\mathscr{B}_t = \mathscr{A}$: le réel α défini à la question II.6).

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2012
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Centres étrangers

EXERCICE 1

Partie A

1) Le point I a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(-1, \frac{1}{3}, 1\right)$. Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est donc

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{t}{3} \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2) Le point K a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}, 0, 1\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $\left(a - \frac{3}{4}, 1, -1\right)$. Une représentation paramétrique de la droite (KL) est donc

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

3) Soient $M\left(1 - t, \frac{1}{3} + \frac{t}{3}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (IJ) et $M'\left(\frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right), t', 1 - t'\right)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite (KL).

$$M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3} + \frac{t}{3} = t' \\ t = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - t' \\ 1 - (1 - t') = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3} + \frac{1 - t'}{3} = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - t' \\ \frac{4t'}{3} = \frac{2}{3} \\ t' = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{3}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Si $a \neq \frac{1}{4}$, le système précedent n'a pas de solution ou encore les droites (IJ) et (KL) n'ont aucun point commun.
Si $a = \frac{1}{4}$, la résolution précédente s'écrit plus simplement $M = M' \Leftrightarrow t = t' = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, les droites (IJ) et (KL) ont en commun le point obtenu quand $t = \frac{1}{2}$ ou $t' = \frac{1}{2}$ à savoir le point Ω de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. En résumé,

$$\boxed{\text{les droites (IJ) et (KL) sont concourantes si et seulement si } a = \frac{1}{4}.}$$

Partie B

1) Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ de même que le vecteur $\overrightarrow{LJ}$. Donc, $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{LJ}$ ou encore le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan IJK. Pour vérifier que le vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK), il suffit de vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IJ} = 8 \times (-1) + 9 \times \frac{1}{3} + 5 \times 1 = -8 + 3 + 5 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IK} = 8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 5 \times 1 = -2 - 3 + 5 = 0.$$

Donc,

$$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n}(8, 9, 5) \text{ est un vecteur normal au plan (IJK).}}$$

b) Le plan (IJK) est le plan passant par le point I $\left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(8, 9, 5)$. Une équation cartésienne du plan (IJK) est donc

$$8(x - 1) + 9\left(y - \frac{1}{3}\right) + 5z = 0 \text{ ou encore } 8x + 9y + 5z - 11 = 0.$$

c) Puisque $M \in (BF)$, les coordonnées de M sont de la forme $(1, 0, z_M)$. Puis

$$M \in (IJK) \Leftrightarrow 8 \times 1 + 9 \times 0 + 5z_M - 11 = 0 \Leftrightarrow z_M = \frac{3}{5}.$$

Puisque $N \in (DH)$, les coordonnées de M sont de la forme $(0, 1, z_N)$. Puis

$$N \in (IJK) \Leftrightarrow 8 \times 0 + 9 \times 1 + 5z_M - 11 = 0 \Leftrightarrow z_N = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{M\left(1, 0, \frac{3}{5}\right) \text{ et } N\left(0, 1, \frac{2}{5}\right).}$$

