Intégrales Sans les Primitives	A.P. en T.S.

- Vos calculatrices calculent des valeurs approchées des intégrales et permettent de les visualiser (voir rabats de couverture du livre Déclic).
- Les logiciels de calcul formel donnent la valeur exacte de la plupart des intégrales. Le logiciel Xcas est gratuit ; vous pouvez le télécharger ou l'utiliser en ligne à www.xcasenligne.fr (Cliquez sur la baguette magique et l'assistant vous guidera).

Extrait du D.S des TS4 (3 exercices, 1h)

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=x\,e^x$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soit a un nombre appartenant à l'intervalle $[0;1]$.
Sur la courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathscr{C}$. On a placé les points $A'(a;0)$ et $B'(1;0)$.

Partie A

On admet que $\int_0^1 x\,e^x\,dx=1$.

1) Calculer l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze ABB'A' est égale à $\frac{1}{2}(-a^2e^a+a\,e^a-a\,e+e)$.

2) En déduire que l'aire de la partie hachurée est $\frac{1}{2}(a\,e^a-a\,e+e-2)$

Partie B

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x(e^x-e)+e-2$.

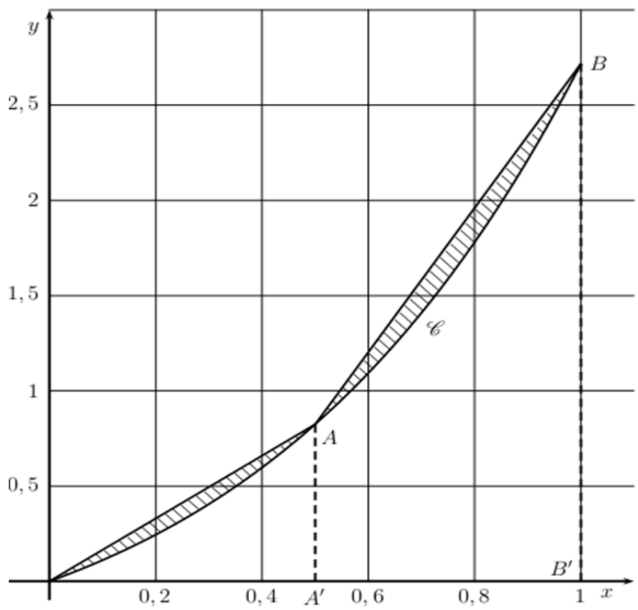
1) a) Soit g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel $x\in[0;+\infty[$.
b) Vérifier que g'' est définie sur $[0;+\infty[$ par $g''(x)=(2+x)e^x$.

2) En déduire les variations de g' sur $[0;+\infty[$.

3) Établir que l'équation $g'(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4) En déduire les variations de g sur $[0;+\infty[$.

5) En Utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.



Exercice n°1 *[4,5 points]*

Déterminer, en justifiant, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x-3+e^{-6x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-x}{e^x+1} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} (2x-5)e^{\frac{x}{3}}$$

Exercice n°2 *[8 points]*

Soit *f* la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1) Déterminer son ensemble de définition D_f.
2) Déterminer les limites de *f* aux bornes de D_f.
3) Donner, en justifiant, les équations des asymptotes horizontales et verticales éventuelles à la courbe représentative de la fonction *f*.
4) Montrer que pour tout *x* de D_f, on a : $f(x)=x+2+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$.
5) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)$. Que peut on en déduire graphiquement ?
6) Étudier la position relative de la courbe représentative de *f* et de la droite d'équation $y=x+2$.

Exercice n°3 *[7,5 points]*

On rappelle la définition de la fonction partie entière:
« pour tout $x\in\mathbb{R}$, $E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal au réel *x*. »

1) Démontrer que, pour tout *x* réel strictement positif, $1-\dfrac{1}{x}<\dfrac{E(x)}{x}\leq 1$.
2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{E(x)}{x}$.
3) Pourquoi est on sur de l'existence d'un réel *A* tel que si $x>A$ alors $\left|\dfrac{E(x)}{x}-1\right|<10^{-5}$.
4) Prouver que pour tout *x* strictement positif, $\left|\dfrac{E(x)}{x}-1\right|<\dfrac{1}{x}$.
5) Déterminer un réel A, positif tel que si $x>A$ alors $\left|\dfrac{E(x)}{x}-1\right|<10^{-5}$.

TOUS les élèves doivent traiter l'exercice 1 puis soit l'exercice 2, soit l'exercice 2 bis, mais pas les deux. L'exercice 2 est un cas particulier de l'exercice 2 bis, qui traite le cas général. Si vous choisissez de traiter l'exercice 2, vous serez noté(e) sur 20. Il y a évidemment un bonus pour traiter le cas général et si vous choisissez de traiter l'exercice 2 bis, vous serez noté(e) sur 22. Si un(e) élève obtient une note supérieure à 20 à ce DS, les points excédentaires seront reportés sur le DS précédent.

/10 **Exercice 1.**

Partie I. R.O.C.

On considérera acquis le résultat suivant : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x$.

/1,5 Prouver que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. *On pourra utiliser la fonction* $g : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$.

En déduire que $\lim_{x\to+\infty} x e^{-x} = 0$.

Partie II. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3} + \frac{e^{-2x}}{1+3x}$, soit $\mathscr{D}_f$ son domaine de définition et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

/1,5 **1)** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

/1 **2)** Montrer que la dérivée de f est du signe de $-6x-5$ sur $\mathscr{D}_f$.

/2 **3)** Dresser le tableau de variations complet de f, c'est à dire comportant en plus des variations toutes les valeurs et limites nécessaires.

4) Étude des asymptotes de $\mathscr{C}$.

/1 **a)** Indiquer toutes les asymptotes de $\mathscr{C}$.

/1 **b)** Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.

5) Étude d'une aire.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=4$ et $x=6$.

/1 **a)** Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[4;6]$.

/1 **b)** En déduire que $2\sqrt{3} \leq \mathscr{A} \leq 2\sqrt{3} + 10^{-4}$.

/10	**Exercice 2.** Cas particulier

ABCD est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs de [AB] et [CD]. J et L sont les points définis par $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

Le but des questions 1 à 5 est de montrer que les droites (IL), (JK) et (BD) sont concourantes en un point R et de préciser la position de R sur (BD). La question 6 propose de démontrer un résultat similaire par des méthodes purement géométriques (sans utiliser les coordonnées).

/0,5 **1)** Expliquer pourquoi $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ constitue un repère de l'espace.

/1 **2)** Donner dans ce repère les cordonnées de tous les points de l'énoncé.

/1,5 **3)** Prouver que les points I, J, K et L sont coplanaires.

/1,5 **4) a)** Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (JK) et (IL).

/2 **b)** En déduire que les droites (IL) et (JK) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. On appellera ce point R.

/1,5 **5)** Montrer que le point R appartient à la droite (BD) et préciser sa position sur (BD) en indiquant la valeur du réel λ pour laquelle on a $\overrightarrow{BR}=\lambda\overrightarrow{BD}$.

/2 **6)** Sans faire aucun calcul, prouver que les droites (KL), (IJ) et (AC) sont concourantes.
Indication : Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (ACD) ?
Dans cette question, toute trace d'initiative même infructueuse sera valorisée.

/12	**Exercice 2 bis.** Cas général

ABCD est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs de [AB] et [CD].

Soit a un réel tel que $a\in[0;1]$ avec .

J et L sont les points définis par $\overrightarrow{AL}=a\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ}=a\overrightarrow{BC}$.

Le but des questions 1 à 5 est de montrer que les droites (IL), (JK) et (BD) sont concourantes en un point R et de préciser la position de R sur (BD). La question 6 propose de démontrer un résultat similaire par des méthodes purement géométriques (sans utiliser les coordonnées).

/0,5 **1)** Expliquer pourquoi $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ constitue un repère du plan.

/1,5 **2)** Donner dans ce repère les cordonnées de tous les points de l'énoncé.

/2 **3)** Prouver que les points I, J, K et L sont coplanaires.

/2 **4) a)** Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (JK) et (IL).

/2,5 **b)** En déduire que les droites (IL) et (JK) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. On appellera ce point R.

/1,5 **5)** Montrer que le point R appartient à la droite (BD) et préciser sa position sur (BD) en indiquant la valeur du réel λ pour laquelle on a $\overrightarrow{BR}=\lambda\overrightarrow{BD}$.

/2 **6)** Sans faire aucun calcul, prouver que les droites (KL), (IJ) et (AC) sont concourantes.
Indication : Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (ACD) ?
Dans cette question, toute trace d'initiative même infructueuse sera valorisée.