Trigonométrie & Intégrales Sans les Primitives | A.P. en T.S.

☐ Exercice ISP 1. Calculer $\int_1^4 (-3x+1)\,\mathrm{d}x$. *On pourra vérifier la valeur obtenue et visualiser à la calculatrice (voir rabats de couverture du livre Déclic).*

☐ Exercice TRIGO 2. Compléter

1) $\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)=$ **2)** $\cos\left(\frac{-57\pi}{3}\right)=$ **3)** $\sin\left(\frac{-31\pi}{6}\right)=$

☐ Exercice ISP 3. Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=\sqrt{x}$.

1) Dans un repère orthonormé, représentez les courbes représentatives des fonctions f et g .

2) Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan située entre les courbes représentatives de f et g pour $x\in[0;3]$. Hachurer $\mathscr{D}$ sur votre dessin

3) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de $\mathscr{D}$. Exprimer $\mathscr{A}$ avec des intégrales puis comme une seule intégrale.

4) Au moyen de la calculatrice, donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à 10^{-2} u.a. (unité d'aire) près.

Pour calculer et visualiser une intégrale à la calculatrice à la calculatrice :voir rabats de couverture du livre Déclic.

5) Hassan a dessiné ces courbes dans un repère ayant pour unité 2 cm, donner une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ qu'il a obtenue au cm² près.

☐ Exercice TRIGO et ISP 4. On donne $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x=1$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

2) **(a)** Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x$ **(b)** Calculer de deux façons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(2x)+6\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

☐ Exercice TRIGO et ISP 5. Donnez un encadrement de $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^{17} x\,\mathrm{d}x$. On pourra commencer par encadrer la fonction.

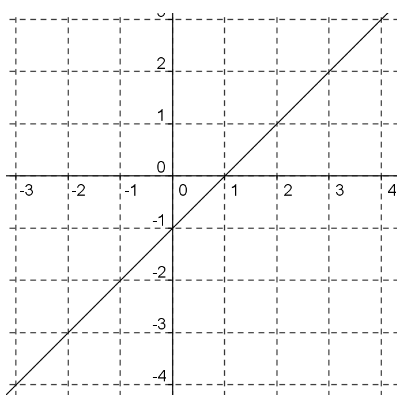
☐ Exercice ISP 6. Prouver par des considérations géométriques que $\int_{-4}^{4} x^3\,\mathrm{d}x=0$.

☐ Exercice TRIGO 7. Résoudre $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$ sur $[-\pi,2\pi]$.

☐ Exercice ISP 8. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n=\int_n^{n+1} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

☐ Exercice TRIGO 9. Résoudre $\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}$ et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

☐ Exercice ISP 10. La représentation graphique de la fonction affine f est donnée ci-contre.



1) Calculer $\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) En déduire $\int_{-3}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On pourra vérifier les valeurs obtenues et visualiser les intégrales à la calculatrice (voir rabats de couverture du livre Déclic).

☐ Exercice ISP 11. Calculer $\int_{-3}^{1}(-x+1)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{1}^{2}(x-1)\,\mathrm{d}x$ puis en déduire $\int_{-3}^{2}|x-1|\,\mathrm{d}x$.

☐ Exercice ISP 12. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n=\int_{n}^{n+1}e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

☐ Exercice ISP 13. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[-5;2]$. On sait que pour tout $x\in[-5;2]$, $-1\leq f(x)\leq 2$ et $2\leq g(x)\leq 5$.

1) En déduire un encadrement de $f+g$ sur $[-5;2]$.

2) Déterminer un encadrement de $2f-3g$ sur $[-5;2]$.

3) En déduire un encadrement de $\int_{-5}^{2}f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x$ et un encadrement de $\int_{-5}^{2}2f(x)-3g(x)\,\mathrm{d}x$.

☐ Exercice TRIGO 14. Exercices de la classe virtuelle WIMS pour vérifier que tout le monde sait s'y connecter.

☐ Exercice TRIGO 15. Exercices de la classe virtuelle WIMS pour vérifier que tout le monde sait s'y connecter.

TOUS les élèves doivent traiter l'exercice 1 puis soit l'exercice 2, soit l'exercice 2 bis, mais pas les deux. L'exercice 2 est un cas particulier de l'exercice 2 bis, qui traite le cas général. Si vous choisissez de traiter l'exercice 2, vous serez noté(e) sur 20. Il y a évidemment un bonus pour traiter le cas général et si vous choisissez de traiter l'exercice 2 bis, vous serez noté(e) sur 22. Si un(e) élève obtient une note supérieure à 20 à ce DS, les points excédentaires seront reportés sur le DS précédent.

/10 **Exercice 16.**

Partie I. R.O.C.

On considérera acquis le résultat suivant : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > x$.

/1,5 Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. *On pourra utiliser la fonction* $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}$.

En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Partie II. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3} + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+3x}$, soit $\mathscr{D}_f$ son domaine de définition et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

/1,5 **1)** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

/1 **2)** Montrer que la dérivée de f est du signe de $-6x-5$ sur $\mathscr{D}_f$.

/2 **3)** Dresser le tableau de variations complet de f, c'est à dire comportant en plus des variations toutes les valeurs et limites nécessaires.

4) Étude des asymptotes de $\mathscr{C}$.

/1 **a)** Indiquer toutes les asymptotes de $\mathscr{C}$.

/1 **b)** Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.

5) Étude d'une aire.

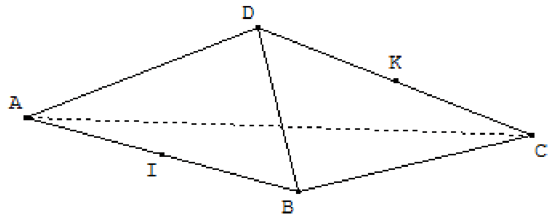
Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=4$ et $x=6$.

/1 **a)** Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[4;6]$.

/1 **b)** En déduire que $2\sqrt{3} \leq \mathscr{A} \leq 2\sqrt{3} + 10^{-4}$.

/10	**Exercice 2.** Cas particulier

ABCD est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs de [AB] et [CD]. J et L sont les points définis par $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.



Le but des questions 1 à 5 est de montrer que les droites (IL), (JK) et (BD) sont concourantes en un point R et de préciser la position de R sur (BD). La question 6 propose de démontrer un résultat similaire par des méthodes purement géométriques (sans utiliser les coordonnées).

/0,5 **1)** Expliquer pourquoi $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ constitue un repère de l'espace.

/1 **2)** Donner dans ce repère les cordonnées de tous les points de l'énoncé.

/1,5 **3)** Prouver que les points I, J, K et L sont coplanaires.

/1,5 **4) a)** Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (JK) et (IL).

/2 **b)** En déduire que les droites (IL) et (JK) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. On appellera ce point R.

/1,5 **5)** Montrer que le point R appartient à la droite (BD) et préciser sa position sur (BD) en indiquant la valeur du réel λ pour laquelle on a $\overrightarrow{BR}=\lambda\overrightarrow{BD}$.

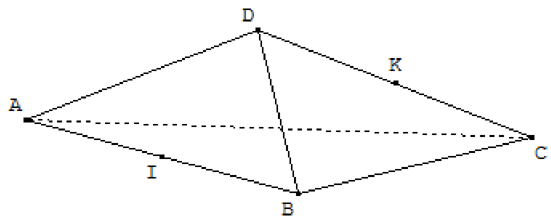
/2 **6)** Sans faire aucun calcul, prouver que les droites (KL), (IJ) et (AC) sont concourantes.
Indication : Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (ACD) ?
Dans cette question, toute trace d'initiative même infructueuse sera valorisée.

/12	**Exercice 2 bis.** Cas général

ABCD est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs de [AB] et [CD].

Soit a un réel tel que $a \in [0;1]$ avec $a \neq \frac{1}{2}$.

J et L sont les points définis par $\overrightarrow{AL}=a\,\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ}=a\,\overrightarrow{BC}$.



Le but des questions 1 à 5 est de montrer que les droites (IL), (JK) et (BD) sont concourantes en un point R et de préciser la position de R sur (BD). La question 6 propose de démontrer un résultat similaire par des méthodes purement géométriques (sans utiliser les coordonnées).

/0,5 **1)** Expliquer pourquoi $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ constitue un repère du plan.

/1,5 **2)** Donner dans ce repère les cordonnées de tous les points de l'énoncé.

/2 **3)** Prouver que les points I, J, K et L sont coplanaires.

/2 **4) a)** Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (JK) et (IL).

/2,5 **b)** En déduire que les droites (IL) et (JK) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. On appellera ce point R.

/1,5 **5)** Montrer que le point R appartient à la droite (BD) et préciser sa position sur (BD) en indiquant la valeur du réel λ pour laquelle on a $\overrightarrow{BR}=\lambda\overrightarrow{BD}$.

/2 **6)** Sans faire aucun calcul, prouver que les droites (KL), (IJ) et (AC) sont concourantes.
Indication : Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (ACD) ?
Dans cette question, toute trace d'initiative même infructueuse sera valorisée.