BAC BLANC TS

durée 4 heures **MATH OBLIGATOIRE** **Calculatrice autorisée**

Dans ce devoir toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.
L'énoncé n'est pas à rendre avec la copie

EXERCICE 1 (5 points)

Les trois parties de cet exercices peuvent être traitées de manière indépendantes.

Vladimir passe ses vacances d'hiver à la station de ski de Sitechaud au bord de la mer Renoi. Dans cette station, le ciel est couvert une fois sur cinq sinon le ciel est dégagé.
On considère que les conditions de ski sont optimales si et seulement si la température extérieure est inférieure à -4°.
Si le ciel est couvert la température extérieure est assimilable à une variable aléatoire T_c qui suit une loi normale de moyenne -5°. On donne $P(T_c \leq -4) = 0,8$.
Si le ciel est dégagé la température extérieure est assimilable à une variable aléatoire T_d qui suit une loi normale de moyenne -1°. On donne $P(T_d \leq -4) = 0,2$.

PARTIE A

On considère que la météo un jour donné est une expérience aléatoire indépendante des jours qui précédent.
On considère un jour donné et on note C l'événement «le ciel est couvert» et S l'événement «les conditions de ski sont optimales».
On arrondira les probabilités à 10^{-2} près.

1. Préciser la valeur de $P(\overline{C})$ ainsi que celle de $P_{\overline{C}}(S)$. En déduire la valeur de $P(S)$.
2. Vladimir se lève un matin et il entend à la radio que les conditions de ski sont optimales. Quelle est la probabilité que le ciel soit couvert ?
3. Vladimir compte rester 14 jours à Sitechaud.

3. a. À combien de jours couverts devra-t-il en moyenne s'attendre ?
3. b. Quelle est la probabilité que le ciel soit couvert la moitié des jours ?
3. c. Quelle est la probabilité que le ciel soit couvert au moins un jour ?

PARTIE B

Déterminer en exposant clairement la démarche $P(T_d \leq 2)$.

PARTIE C

On note σ l'écart-type de la loi normale associée à la variable aléatoire T_c .

1. Montrer que $P(T_c \leq -4) = 0,8$ équivaut à $P\left(Z \leq \dfrac{1}{\sigma}\right) = 0,8$ où Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
2. En déduire une valeur approchée de σ au millième près.
3. Déterminer l'intervalle fermé, centré en -5 de sorte que la température extérieure par temps couvert appartienne à cet intervalle dans 95 % des cas.

EXERCICE 2 (5 points)

Cet exercice est un vrai-faux avec justification. Pour chacune des cinq propositions ci-dessous, on dira si elle est vraie ou fausse en justifiant à chaque fois. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2+\cos x)e^{1-x}$.

Proposition 1 : La courbe représentative de g admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.

Proposition 2 : La courbe représentative de g est située au dessus de l'axe des abscisses.

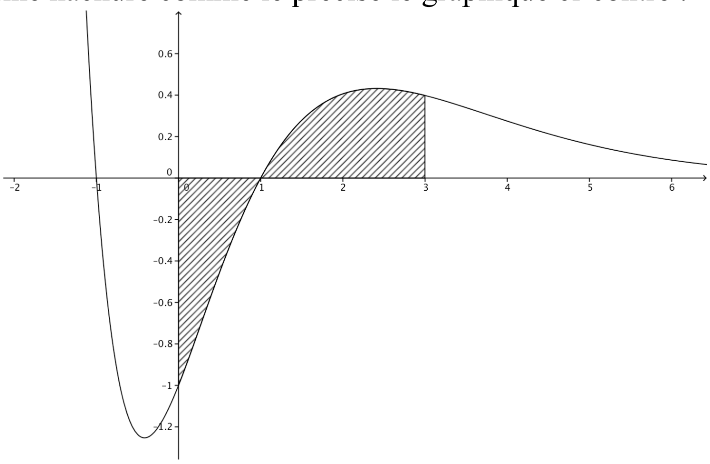
2. On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$. On donne $h'(x) = \dfrac{2e^x x - e^x}{2\sqrt{x^3}}$.

Proposition 3 : La tangente à la courbe représentative de h au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ passe par l'origine du repère.

Proposition 4 : Le minimum de la fonction h est égal à $\dfrac{7}{3}$.

3. On représente dans un repère, la courbe d'équation $y = (x^2 - 1)e^{-x}$.

On considère le domaine hachuré comme le précise le graphique ci-contre :



Proposition 5 : Si le repère à pour unités 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées, l'aire du domaine hachuré est environ égale à 2 cm^2 .

EXERCICE 3 (5 points) (pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité)

La partie C est indépendante des deux autres parties.

On considère la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ à termes complexes définie par $z_0 = 1+i$ et, pour tout entier naturel n, par : $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = a_n + ib_n$ où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n .

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$.

PARTIE A

1. Donner a_0 et b_0 .
2. Calculer la valeur exacte de a_1 et de b_1 .
3. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n . En déduire l'expression de a_{n+1} puis l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
4. Quelle est la nature de la suite $(b_n)_{n\geq 0}$? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de la suite $(b_n)_{n\geq 0}$.

PARTIE B

1. **Recopier** et compléter l'algorithme suivant qui lorsque l'on entre l'entier n affiche le réel a_n .

```
Variables :      a et b sont des nombres réels
                 k et n sont des nombres entiers
Initialisation : Affecter à a la valeur ...
                 Affecter à b la valeur ...
Traitement :     Entrer la valeur n
                 Pour k allant de ... à ....
                     Affecter à a la valeur ....
                     Affecter à b la valeur ....
                 Fin pour
Sortie :         Afficher ....
```

2. À l'aide de l'algorithme ci-dessus, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a(n)	1	0,805	0,559	0,376	0,251	0,168	0,112	0,075	0,050	0,033

Quelle(s) conjecture(s) peut-on tirer de ce tableau ?

PARTIE C

On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' : $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (*inégalité triangulaire*)

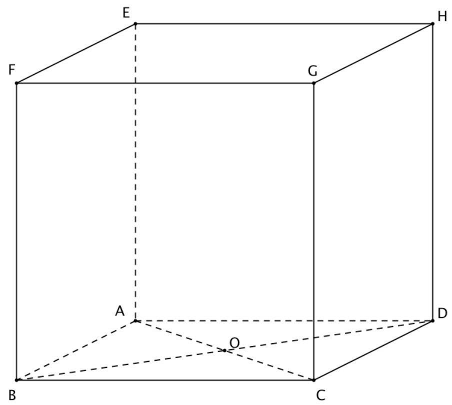
1. Montrer que pour tout entier n, $|z_{n+1}|\leq\dfrac{2|z_n|}{3}$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=|z_n|$.

2. a. Recopier et modifier l'algorithme ci-dessus afin que celui-ci, lorsque l'on entre n, calcule le terme u_n .

2. b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\sqrt{2}$. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

EXERCICE 4 (5 points)



ABCDEFGH est un cube. O est le centre de la face ABCD.

On se place dans le repère orthonormé direct $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

PARTIE A

1. Montrer que BED est un triangle équilatéral.
2. On considère le point I tel que : $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}$. Montrer que les coordonnées de I sont $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.
3. Montrer que les points A, I et G sont alignés.

PARTIE B

On considère un réel k, à partir de ce réel, on définit le point M_k tel que $\overrightarrow{AM_k}=k\overrightarrow{AG}$, le plan $\left(P_k\right)$ parallèle à (BED) passant par M_k et le point N_k intersection de $\left(P_k\right)$ avec (BC).

1. Lorsque $k=\frac{1}{3}$, identifier les points M_k et N_k .
2. Exprimer les coordonnées de M_k en fonction de k.
3. Déterminer une représentation paramétrique de (BC).

4. a. Montrer que, lorsque $k=\frac{1}{2}$, $\begin{cases} x=\frac{1}{2}-u-v \\ y=\frac{1}{2}+v \\ z=\frac{1}{2}+u \end{cases}$ avec $u\in I\!R$ et $v\in I\!R$ est une représentation paramétrique de $\left(P_{1/2}\right)$.

4. b. En déduire les coordonnées du point $N_{1/2}$

5. Dans cette question, on admet que N_k a pour coordonnées $\left(1;3k-1;0\right)$.

5. a. Montrer que $M_kN_k=\sqrt{6k^2-6k+2}$.

5. b. Déterminer la valeur de k pour laquelle la distance M_kN_k est minimale ?