BAC BLANC TS

durée 4 heures **MATH SPÉCIALITÉ** **Calculatrice autorisée**

Dans ce devoir toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

L'énoncé n'est pas à rendre avec la copie

EXERCICE 1 (5 points)

Les trois parties de cet exercices peuvent être traitées de manière indépendantes.

Vladimir passe ses vacances d'hiver à la station de ski de Sitechaud au bord de la mer Renoi. Dans cette station, le ciel est couvert une fois sur cinq sinon le ciel est dégagé.
On considère que les conditions de ski sont optimales si et seulement si la température extérieure est inférieure à -4°.
Si le ciel est couvert la température extérieure est assimilable à une variable aléatoire T_c qui suit une loi normale de moyenne -5°. On donne $P(T_c \leq -4) = 0,8$.
Si le ciel est dégagé la température extérieure est assimilable à une variable aléatoire T_d qui suit une loi normale de moyenne -1°. On donne $P(T_d \leq -4) = 0,2$.

PARTIE A

On considère que la météo un jour donné est une expérience aléatoire indépendante des jours qui précédent.
On considère un jour donné et on note C l'événement «le ciel est couvert» et S l'événement «les conditions de ski sont optimales».
On arrondira les probabilités à 10^{-2} près.

1. Préciser la valeur de $P(\overline{C})$ ainsi que celle de $P_{\overline{C}}(S)$. En déduire la valeur de $P(S)$.
2. Vladimir se lève un matin et il entend à la radio que les conditions de ski sont optimales. Quelle est la probabilité que le ciel soit couvert ?
3. Vladimir compte rester 14 jours à Sitechaud.

3. a. À combien de jours couverts devra-t-il en moyenne s'attendre ?
3. b. Quelle est la probabilité que le ciel soit couvert la moitié des jours ?
3. c. Quelle est la probabilité que le ciel soit couvert au moins un jour ?

PARTIE B

Déterminer en exposant clairement la démarche $P(T_d \leq 2)$.

PARTIE C

On note σ l'écart-type de la loi normale associée à la variable aléatoire T_c .

1. Montrer que $P(T_c \leq -4) = 0,8$ équivaut à $P\left(Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 0,8$ où Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
2. En déduire une valeur approchée de σ au millième près.
3. Déterminer l'intervalle fermé, centré en -5 de sorte que la température extérieure par temps couvert appartienne à cet intervalle dans 95 % des cas.

EXERCICE 2 (5 points)

Cet exercice est un vrai-faux avec justification. Pour chacune des cinq propositions ci-dessous, on dira si elle est vraie ou fausse en justifiant à chaque fois. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$.

Proposition 1 : La courbe représentative de g admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.

Proposition 2 : La courbe représentative de g est située au dessus de l'axe des abscisses.

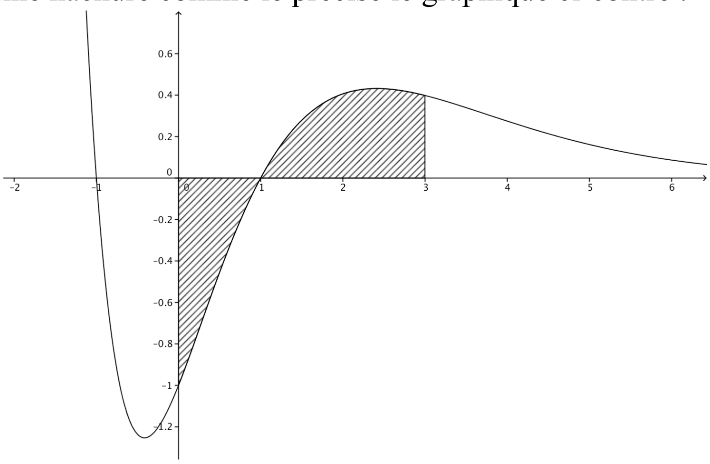
2. On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$. On donne $h'(x) = \dfrac{2e^x x - e^x}{2\sqrt{x^3}}$.

Proposition 3 : La tangente à la courbe représentative de h au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ passe par l'origine du repère.

Proposition 4 : Le minimum de la fonction h est égal à $\dfrac{7}{3}$.

3. On représente dans un repère, la courbe d'équation $y = (x^2 - 1)e^{-x}$.

On considère le domaine hachuré comme le précise le graphique ci-contre :



Proposition 5 : Si le repère à pour unités 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées, l'aire du domaine hachuré est environ égale à 2 cm^2.

EXERCICE 3 (5 points) (pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité)

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

PARTIE A une suite récurrence

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et on note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = AC_n$.

1. Déterminer la matrice A.

2. On admet que $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. a. À l'aide de la calculatrice déterminer P^{-1}.

2. b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

2. c. Exprimer la matrice D^n en fonction de n.

3. On admet que : $A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$. En déduire u_n en fonction de n.

PARTIE B un algorithme

On considère l'algorithme suivant :

La commande $x\%y$ calcule le reste de la division euclidienne de x par y.

```
variables :       a, b, c et d sont des nombres réels
                  i et n sont des entiers positifs supérieurs ou égaux à 2
initialisation :  a prend la valeur 3
                  b prend la valeur 8
traitement :      Saisir n
                  Pour i variant de 2 à n faire
                        c prend la valeur a
                        a prend la valeur b
                        b prend la valeur 5a − 6c
                        d prend la valeur b%7
                        Afficher d
                  Fin pour
sortie :          Afficher b
```

Appliquer cet algorithme pour n=6 en **recopiant** et remplissant le tableau ci-dessous.
On fera autant de colonnes que nécessaires.
On entourera dans le tableau le (ou les) nombre(s) affiché(s).

i	2			
c				
a				
b				
d				

PARTIE C un problème de congruence

On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par : v_n est le reste de la division euclidienne de $2^n + 2 \times 3^n$ par 7.

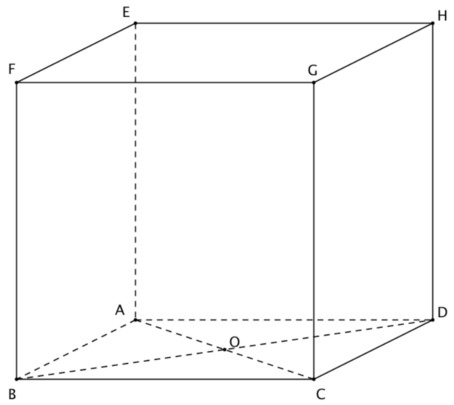
On donne le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
reste modulo 7 de 2^n	1	2	4	1	2	4	1
reste modulo 7 de 3^n	1	3	2	6	4	5	1

1. Calculer la valeur de v_{2014} .

2. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels $2^n + 2\times 3^n$ est divisible par 7.

EXERCICE 4 (5 points)



ABCDEFGH est un cube. O est le centre de la face ABCD.

On se place dans le repère orthonormé direct $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

PARTIE A

1. Montrer que BED est un triangle équilatéral.

2. On considère le point I tel que : $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OE}$. Montrer que les coordonnées de I sont $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

3. Montrer que les points A, I et G sont alignés.

PARTIE B

On considère un réel k, à partir de ce réel, on définit le point M_k tel que $\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AG}$, le plan (P_k) parallèle à (BED) passant par M_k et le point N_k intersection de (P_k) avec (BC).

1. Lorsque $k = \dfrac{1}{3}$, identifier les points M_k et N_k.

2. Exprimer les coordonnées de M_k en fonction de k.

3. Déterminer une représentation paramétrique de (BC).

4. a. Montrer que, lorsque $k = \dfrac{1}{2}$, $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - u - v \\ y = \dfrac{1}{2} \qquad\quad + v \\ z = \dfrac{1}{2} + u \end{cases}$ avec $u \in I\!R$ et $v \in I\!R$ est une représentation paramétrique de $(P_{1/2})$.

4. b. En déduire les coordonnées du point $N_{1/2}$

5. Dans cette question, on admet que N_k a pour coordonnées $(1;3k-1;0)$.

5. a. Montrer que $M_kN_k = \sqrt{6k^2 - 6k + 2}$.

5. b. Déterminer la valeur de k pour laquelle la distance M_kN_k est minimale ?