Ch 5	Probabilités	1ère S

Table des matières

Nous allons utiliser l'exercice suivant pour revoir les notions du programme de seconde et illustrer celles de première. N'hésitez donc pas lors de la résolution à aller chercher les définitions et les informations qui vous manquent dans le cours qui suit. La table des matières ci-dessus est là pour vous aider dans cette recherche.

♠ Exercice 1. Lancer de deux pièces.

Partie I [Révisions de 2nde]

Une pièce est truquée de la façon suivante : La probabilité d'apparition d'une face « Pile » est le double de celle d'une face « Face ». On lance cette pièce deux fois de suite.

1) Choisir un univers Ω permettant de modéliser cette expérience.

2) Quelle est la probabilité d'obtenir « Pile » au premier tirage ? Quelle est la probabilité d'obtenir « Face » au premier tirage ?

3) Les événements suivants sont-ils des événements élémentaires ?
A = Obtenir « Pile » puis « Face ». : . . . .
B = Obtenir une fois « Pile » et une fois « Face », dans n'importe quel ordre : . . . .

4) Déterminer la loi de probabilité associée à deux lancers successifs de cette pièce. *On pourra commencer par représenter la situation par un arbre pondéré.*

5) S'agit-il d'une situation d'équiprobabilité ?

6) Quelle est la probabilité d'obtenir « Pile » puis « Face » ?

7) Quelle est la probabilité d'obtenir une fois « Pile » et une fois « Face »?

8) Calculer de deux façons la probabilité d'obtenir « Pile » au moins une fois (toujours en deux tirages).

Partie II [Notions de 1ère]

Un forain organise le jeu suivant avec cette pièce truquée : On paie 1€ pour jouer. Le jeu consiste à lancer deux fois la pièce et si on obtient deux fois « Face », on gagne 4 € ; si on obtient une fois « Face », on gagne 1 € et sinon on ne gagne rien. On note X le gain à ce jeu (en une partie comportant deux lancers).

9) Quels sont les gains possibles à ce jeu ? Avec quelle probabilité ? *Présenter les résultats sous forme de tableau en mettant dans la première ligne les valeurs que peut prendre X et dans la seconde ligne les probabilités correspondantes.*

10) Ce jeu est-il favorable au joueur ? On pourra utiliser la notion d'*espérance* : l'espérance de gain à un jeu est ce que le jouer peut *espérer* gagner en moyenne sur un très grand nombre de parties.

11) Quel est l'écart type du gain à ce jeu ?

I. Probabilité d'un événement, Loi de probabilité [2nde]

A. Définitions : Univers, événements

Définition : L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire s'appelle l'***univers*** de cette expérience. On le note souvent Ω.

Un ***événement*** est un sous-ensemble de l'univers.

Un ***événement élémentaire*** ω_i est un événement contenant une seule issue.

Exemple : Lors du lancé d'un dé à 6 faces,

- *l'univers est* $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$ *. C'est l'ensemble des issues possibles.*
- *l'événement A = « obtenir un résultat pair » est* $A=\{2;4;6\}$ *. Ce n'est pas un événement élémentaire car il comporte trois issues et non une.*
- *l'événement* $\omega_5=$« obtenir 5 »$=\{5\}$ *est un événement élémentaire car il comporte une seule issue.*

B. Loi de probabilité

Définition : Définir une ***loi de probabilité*** *P* sur Ω c'est associer à chaque événement élémentaire ω_i sa probabilité p_i, les p_i étant des nombres appartenant à $[0;1]$ dont la somme vaut 1, c'est à dire tels que $\sum p_i=1$.

On note les probabilités des événements élémentaires dans un tableau qui constitue la *loi de probabilité*.

Les événements élémentaires ω_i				
Leur probabilité p_i				

Et oui, quand on vous demande la loi, on vous demande en fait la probabilité de chacun des événements élémentaires, donc en pratique, un tableau de ce type.

C. Probabilité d'un événement

On peut utiliser la loi de probabilité de P sur Ω pour calculer la probabilité de n'importe que événement, grâce au résultat ci-dessous :

Propriété : La probabilité d'un événement A s'obtient en additionnant les probabilités de tous les événements élémentaires qui le composent (= ceux pour lesquels A est vrai.)

Autrement dit, pour tout événement A, $P(A)=\sum_{x_i\in A} p_i$.

Remarque : Pour tout événement A, on a $\boxed{0\leqslant P(A)\leqslant 1}$.

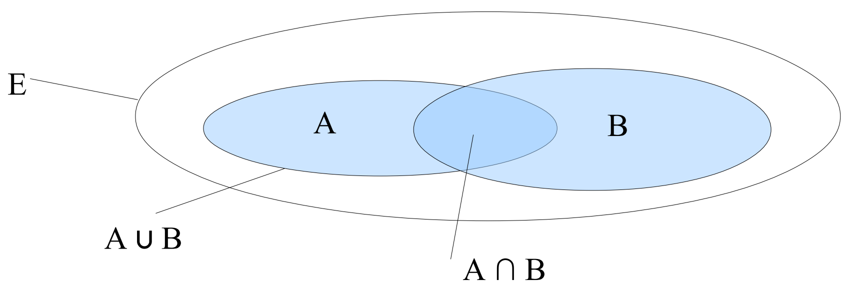
D. Probabilité du contraire d'un événement

Propriété : A étant un événement quelconque, la probabilité de son événement contraire noté $\bar{A}$ est $P(\bar{A})=1-P(A)$.

Exemple : Lors du lancé d'un dé équilibré à 6 faces, si A est l'événement « obtenir un résultat pair » alors son événement contraire est $\bar{A}$ *=« obtenir un résultat impair ».*

E. Probabilité d'une réunion d'événements : «A OU B»

Propriété : A et B étant des événements quelconques, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.



Exemple : Lors du lancé d'un dé équilibré à 6 faces, si A est l'événement « obtenir un résultat pair » si B est l'événement « obtenir un résultat (strictement) inférieur à 3 » alors
$A\cup B$ *est l'événement « obtenir un résultat pair OU inférieur à 3 »,*
$A\cap B$ *est l'événement «obtenir un résultat pair ET inférieur à 3 »={2},* $P(A\cap B)=P(2)=\frac{1}{6}$. *Avec la formule* $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, *on a* $P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.
Vérification par un calcul direct: $A\cup B=\{1;2;4;6\}$ *d'où* $P(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

F. Situation d'équiprobabilité

Définition : Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont *équiprobables* et que la loi est *équirépartie.*

Propriété : Dans le cas d'une loi équiprobable, pour tout événement A, $P(A)=\frac{\text{nombre de cas où } A \text{ est réalisé}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Pratique : Grâce à cette formule, les calculs de probabilité sont assez faciles dans les univers où la loi de probabilité est équiprobable donc, au moment du choix de l'univers, on essaie souvent de choisir un univers dans lequel c'est le cas.

♠ Exercice 2. On s'intéresse à la somme obtenue lors du lancer de deux dés cubiques non truqués, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 10 ?

♠ Exercice 3. Une petite ville compte 5 hôtels. Trois voyageurs s'y arrêtent pour la nuit et choisissent un hôtel au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent tous les 3 dans le même hôtel?

II. Variable aléatoire [1ère]

A. Définition

Définition : Soit $\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\omega_3;\ldots;\omega_n\}$ un univers et P une loi de probabilité sur Ω.

▪ On définit une ***variable aléatoire*** X sur Ω en associant un nombre **réel** à chaque événement élémentaire de Ω. Une variable aléatoire est donc une fonction de Ω dans ℝ .

▪ Si $\{x_1;x_2;x_3;\ldots;x_r\}$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X sur l'univers Ω alors pour tout entier i compris entre 1 à r l'événement « *X prend la valeur* x_i » est noté « $X=x_i$ ». Sa probabilité $P(X=x_i)$ est la probabilité de l'ensemble des issues ayant pour image x_i par X.

Exemple et contre-exemple :

- *Associer au lancer de deux dés la somme des points obtenus définit une variable aléatoire.*
- *Associer au tirage d'une boule dans une urne la couleur de la boule tirée ne définit PAS une variable aléatoire car la couleur n'est un nombre.*

B. Loi d'une variable aléatoire

♠ Exercice 4. Soit S la somme obtenue lors du lancer de deux dés tétraédriques non truqués, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S.
Indication :

Définition : Définir la ***loi de probabilité d'une variable aléatoire*** X c'est :
1) Préciser l'ensemble des valeurs prises par X ;
2) calculer pour chaque x_i sa probabilité $p_i=P(X=x_i)$. [Remarque : $\sum p_i=1$.]

C. Espérance, variance et écart type d'une variable aléatoire

1. Définitions

Définition : Soit X une variable aléatoire,

- ***l'espérance de la variable aléatoire X*** est le réel $E(X)$ défini par
$$E(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_r x_r$$. On la note aussi $\overline{X}$.
- ***la variance de la variable aléatoire X*** est le réel $V(X)$ défini par :
$$V(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} p_i\left(x_i - \overline{X}\right)^2 = p_1\left(x_1 - \overline{X}\right)^2 + p_2\left(x_2 - \overline{X}\right)^2 + \dots + p_r\left(x_r - \overline{X}\right)^2$$
- ***l'écart type de la variable aléatoire X*** est le réel $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{V(X)}$.

Le mot *espérance* vient du jeu : Si X est le gain, E(X) est ce que le jouer peut *espérer* gagner en moyenne sur un très grand nombre de parties.
Le jeu est *favorable au joueur* si $E(X) > 0$.

Autre formule de la variance :
$$V(X) = \left(\sum_{i=1}^{r} p_i x_i^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$
« la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne »

Plus l'écart type (ou la variance) est grand, plus les valeurs sont <u>dispersées</u> autour de l'espérance $E(X)$.

Si X est le gain à un jeu, son espérance E(X) est le gain moyen sur un très grand nombre de parties. Le jeu est *favorable au joueur* si $E(X) > 0$; Le jeu est *défavorable au joueur* si $E(X) < 0$ et le jeu est *équitable* si $E(X) = 0$.

2. Mais ...on a déjà fait tout ça dans le cours de statistiques, non ? Pourquoi recommencer ?

...parce que ce n'est pas exactement la même chose :

■ Exemples : (1) Vous lancez un dé 10 000 fois et vous notez la <u>fréquence</u> d'apparition de la face 4 : *Vous êtes en train de faire des statistiques.* (2)Vous *imaginez* que vous lancez un dé, vous supposez que le dé est non truqué et vous en *déduisez* que la <u>probabilité</u> d'apparition de la face 4 est de une chance sur 6 : *Vous êtes en train de faire des probabilités.*

Observé	Théorique
Relève du domaine des **statistiques**	Relève du domaine des **probabilités**
Série statistique	Variable aléatoire
Mesures de tendance centrale :Moyenne et Espérance	
Moyenne d'une série statistique (= moyenne <u>observée</u>) $m = \overline{x} = \sum_{i=1}^{r} f_i x_i = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_r x_r$ où $f_i = \frac{n_i}{N}$ est la fréquence (observée) d'apparition de x_i.	**Espérance d'une variable aléatoire X (= moyenne <u>théorique</u>)** $E(X) = \overline{X} = \sum_{i=1}^{r} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_r x_r$ où p_i est la probabilité d'obtenir x_i.
Mesure de la dispersion : Variance et écart type	
Écart type d'une série statistique $s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} f_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$ où $f_i = \frac{n_i}{N}$ est la fréquence (observée) de x_i et $\overline{x}$ la moyenne des valeurs observées.	**Écart type d'une variable aléatoire X** $\sigma(X) = \sigma_X = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} p_i\left(x_i - \overline{X}\right)^2}$ où p_i est la probabilité de x_i et $\overline{X}$ l'espérance de la variable aléatoire X.
Si on répète la même expérience aléatoire, on peut obtenir une moyenne et un écart type différent.	Pour une expérience aléatoire donnée, l'écart type et l'espérance sont uniques.

■ **Le lien entre les deux : la Loi des grands nombres.**

Loi des grands nombres (admise) : Si l'on répète un grand nombre de fois une expérience, la ***fréquence*** d'une issue, qui est la valeur observée, se rapproche de la ***probabilité*** de cette issue, qui est la valeur théorique.

Si l'on répète un grand nombre de fois une expérience, la ***moyenne*** des issues d'une variable aléatoire, qui est la valeur observée, se rapproche de l'***espérance*** de cette variable aléatoire, qui est la valeur théorique.

3. Effet d'une transformation affine sur l'Espérance, la variance et l'écart type

Propriété : Soit X une variable aléatoire (v.a.) et soit Y la variable aléatoire définie par $Y = mX + p$. Son espérance, sa variance et son écart-type sont donnés par :

- $E(mX+p) = mE(X)+p$
- $V(mX+p) = m^2 V(X)$
- $\sigma(mX+p) = |m|\sigma(X)$.

III. Représentation d'une succession d'expériences par un arbre pondéré[1] [2nde]

Exemple :

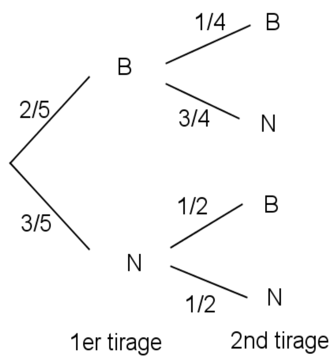
Étant donné une urne contenant 2 boules blanches et 3 boules noires, on tire successivement deux boules sans remise.

Au premier tirage, on a 2 chances sur 5 de tirer une boule blanche et 3 chances sur 5 de tirer une boule noire, d'où le 2/5 et le 3/5 sur l'arbre pondéré ci-contre.

Deuxième tirage :

- Si au premier tirage on a obtenu une boule noire, il reste dans l'urne 2 boules de chaque couleur et on a maintenant autant de chance de tirer une boule noire que de tirer une boule blanche,d'où les deux 1/2 sur l'arbre pondéré ci-contre.
- Si au premier tirage on a obtenu une boule blanche, il reste dans l'urne 1 boule blanche et 3 boules noires et on a donc maintenant 1 chance sur 4 de tirer une boule blanche et 3 chances sur 4 de tirer une boule noire, d'où le 1/4 et 3/4 sur l'arbre pondéré ci-contre.

Arbre pondéré représentant le tirage successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules noires et 2 boules blanches



Les arbres pondérés sont très pratiques car il est facile de calculer les probabilités des événements qui sont au bout des branches grâce à la règle suivante :

Propriété : Pour calculer la probabilité d'un événement correspondant à un chemin d'un **arbre pondéré**, on **multiplie** les probabilités que l'on rencontre en suivant les branches de l'arbre.

Par exemple, la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule noire dans l'exemple ci-dessus est $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$.

[1] « Pondéré » car il y a un poids sur chaque branche, qui est la probabilité de l'événement.

Fin du cours, debut de mon brouillon

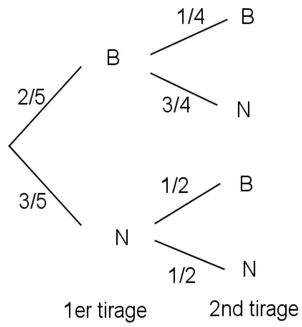
IV. Répétition d'expériences indépendantes (pour le chapitre sur Bernoulli)

Exemple :

Étant donné une urne contenant 3 boules noires et 2 boules blanches, si on tire successivement deux boules avec remise, savoir que la première fois on a obtenu une boule noire ne donne aucune indication sur ce qui va se passer la seconde fois. Les probabilités respectives d'obtenir une boule noire ou une boule blanche sont les mêmes pour le premier et le second tirage: On dit que les tirages successifs sont *indépendants*.

Si par contre on pioche successivement deux boules dans cette même urne sans remise, savoir que la première fois on a obtenu une boule noire donne indication sur ce qui va se passer la seconde fois : On a maintenant autant de chance de tirer une boule noire que de tirer une boule blanche, ce qui n'était pas le cas au premier tirage (voir arbre pondéré ci-contre). On dit que les tirages successifs ne sont *pas indépendants.*

Arbre pondéré représentant le tirage successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules noires et 2 boules blanches



Définition : Si lorsque l'on répète une l'expérience aléatoire savoir ce qui s'est passé la première fois ne donne aucune indication sur ce qui va se passer la seconde fois, on dit que les expériences successives sont ***indépendantes***.

Propriété : Si A et B sont deux issues d'une expérience aléatoires avec pour probabilités respectives P(A) et P(B) et si on peut répéter l'expérience de façon indépendante alors la probabilité d'obtenir A puis B est $P(A)\times P(B)$.

Arbre pondéré : Pour calculer la probabilité d'un événement on multiplie les probabilités que l'on rencontre en suivant les branches de l'arbre.

Par exemple, la proba

♠ Exercice 5. Une petite ville compte 5 hôtels. Trois voyageurs s'y arrêtent pour la nuit et choisissent un hotel au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent tous les 3 dans le même hôtel?

i.e.[2]

---

[2] i.e. signifie « id est » ce qui veut dire « c'est à dire » en latin. Cela s'emploie beaucoup en mathématiques et c'est très chic.

- En pratique, pour définir les probabilités p_i on peut effectuer un très grand nombre de fois l'expérience aléatoire. La fréquence des résultats obtenus permet d'obtenir une estimation de la loi de probabilité. Par exemple, si en lançant 1 000 000 de fois un dé, on obtient 166 724 fois la face "6" on considérera que la probabilité d'obtenir un "6" est d'environ $\frac{166\ 724}{1\ 000\ 000} \approx \frac{1}{6}$
- A condition de faire certaines hypothèses (par exemple : "le dé n'est pas truqué") les théorèmes qui suivent permettent de calculer les loi de probabilité de certaines expériences sans avoir recours aux statistiques. Les statistiques peuvent alors servir à valider les hypothèses que l'on a faites au départ.

Loi des grands nombres (admise) : Si l'on répète k fois, dans les mêmes conditions, une expérience E, la fréquence d'une issue de E se rapproche, lorsque k devient grand, de la probabilité p que cette issue se réalise lors d'une seule expérience. Autrement dit, la fréquence, qui est la valeur observée, se rapproche de la probabilité, qui est la valeur théorique.

expérience excel : tirage d'un dé.

face	1	2	3	4	5	6	total
Fréquence (1000 tirages)	0,148	0,168	0,184	0,176	0,156	0,168	1
fréquence théorique	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167

INTRO ORALE
Exemple : lancé d'un dé
Stats : compter les apparitions de chaque face.
Proba = en faire un modèle théorique. Si on lance le dé N fois, la fréquence d'apparition (loi des grands nombres). Ces probas sont determinées par la théorie.
Proba = théorique, modélisation d'une situation
Stats = empirique

L'***espérance*** d'une variable aléatoire, c'est la moyenne théorique, alors que dans le chapitre de statistiques ce que l'on a calculé est la moyenne observée.