Trigonométrie en 1S : Une activité pour bien démarrer

♠ Exercice 1.

1) a) Quelle est la distance parcourue sur un cercle de rayon 1 à partir de si on fait 1 tour complet ? Un demi tour ? Un quart de tour ? Un sixième de tour ? [Introduction du radian]

b) A quels angles ces distances correspondent-elles ? (mettre dans un tableau)

Distance parcourue, mesurée en nombres de tours	1 tour	Un demi tour	Un quart de tour		Un sixième de tour
Distance parcourue = Longueur de l'arc de cercle	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{3}$
Mesure de l'angle en radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	1	...
Mesure de l'angle en degré	360°	180°	90°	≈57,3°	60°

2) Charles, Thierry et Juliette vont faire une pique nique. Ils suivent un chemin circulaire dans la forêt de rayon 1 km. Ils se donnent RV à $\frac{\pi}{4}$ de l'entrée.

a) Thierry ne rejoint pas les deux autres. Pourquoi ? [introduire sens trigonométrique, différence entre angles géométriques et angles orientés]

b) Farceurs, ils donnent RV à Enguerrand $\frac{\pi}{4}+6\pi$ km de l'entrée. Enguerrand pique-niquera-t-il avec eux ? [introduire : Plusieurs mesures pour un même angle notées $\alpha+2k\pi$]

c) Une autre façon d'être sûrs de se retrouver est de donner les coordonnées du point de RV. « RV au point de coordonnées (x, y) » est sans ambiguïté ! [introduire le cos et le sinus d'un angle]. Quelles sont les coordonnées du lieu de pique-nique ? Et celles de l'endroit où les attend Thierry ? [Angles associés]

Ch 9	Trigonométrie	1ère S

Table des matières

Objectifs du chapitre

Cochez ce qui est acquis pour vérifier que vous êtes au point sur ce chapitre.

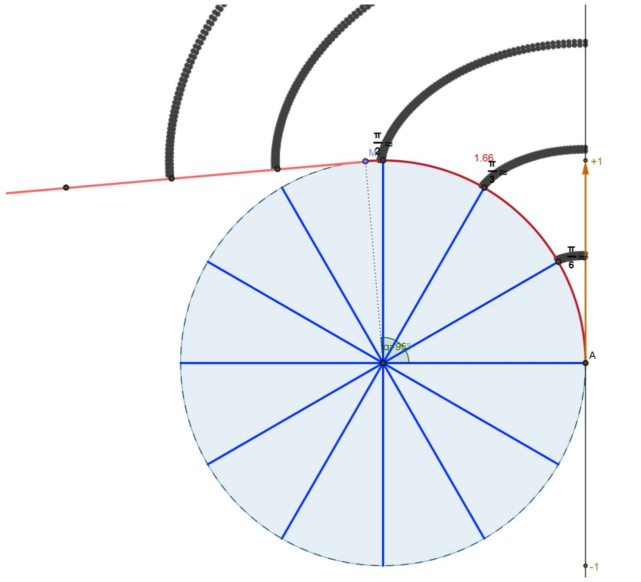
- ☐ Notions à connaître : cercle trigonométrique, radian, sens trigonométrique.
- ☐ Connaître les valeurs remarquables de sinus et cosinus, par exemple $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- ☐ Définition de la mesure d'un angle orienté.
- ☐ Savoir trouver la mesure principale d'un angle orienté.
- ☐ Savoir utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer les sinus et cosinus d'angles associés, par exemple savoir exprimer $\cos(x+\pi)$ en fonction de $\cos x$.
- ☐ Savoir utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations de la forme $\cos x=\cos a$ ou $sinx=\sin a$. trouver la mesure principale d'un angle orienté.

I. Le cercle trigonométrique.

A. enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

Définition: Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé.
Le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé cercle trigonométrique. Le sens inverse des aiguilles d'une montre est appelé le sens direct (positif).

Définition : L'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique permet de repérer chaque point M du cercle par un unique réel t de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
En enroulant la droite des réels sur le cercle, on se rend compte que plusieurs réels repèrent le point M, ils sont de la forme $t+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

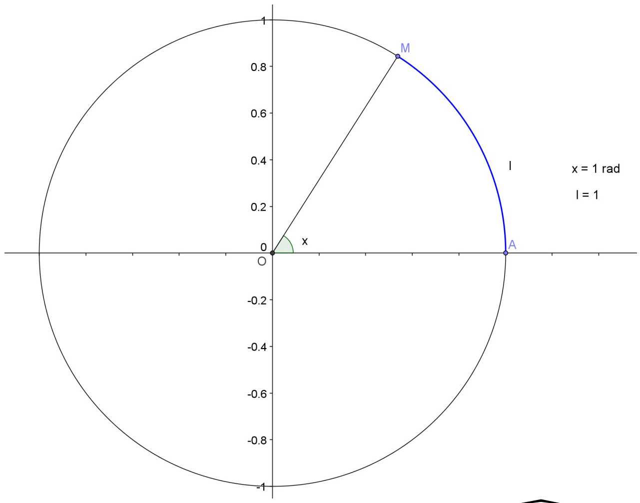


B. Le radian

Définition: Le ***radian*** est une mesure d'angle proportionnelle au degré et caractérisée par $\pi\, rad = 180^\circ$

Intérêts du radian :

- Un arc de cercle de rayon R intercepté par un angle α a pour longueur $R\alpha$ à condition que l'angle α soit exprimé en radian. Si α soit exprimé en degrés, la longueur de l'arc est $R\alpha\dfrac{\pi}{180}$.
- La dérivée de $x\mapsto\cos x$ est $x\mapsto-\sin x$ condition que x soit exprimé en radian et c'est $x\mapsto-\dfrac{\pi}{180}\sin x$ si x est exprimé en degrés. (idem pour la dérivée de sinus)



Soit l, la longueur de l'arc de cercle AM. Si $l=1$, on définit l'angle $\widehat{AOB}$ comme mesurant 1 radian.

Définition: Le ***radian*** est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur le cercle trigonométrique un arc de cercle de longueur 1 unité.

On a le tableau de correspondance suivant :

Longueur de l'arc	2π	π	$\dfrac{\pi}{2}$	1	...
Mesure de l'angle en radians	2π	π	$\dfrac{\pi}{2}$	1	...
Mesure de l'angle en degré	360°	180°	90°	≈57,3°	...

On remarque que sur un cercle trigonométrique, si $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ alors $l=x$.

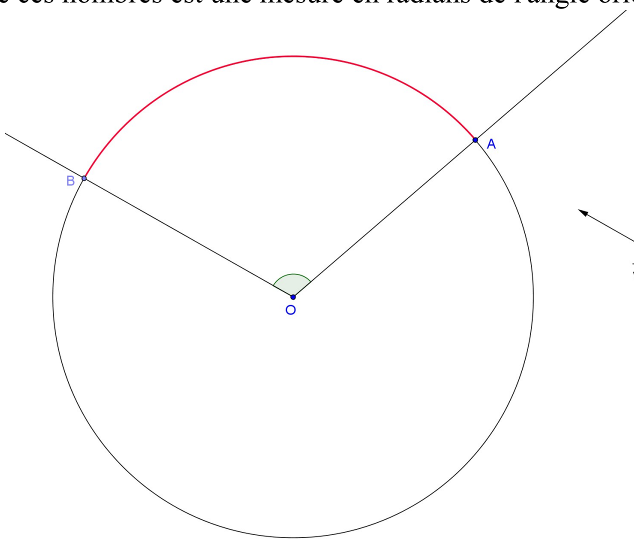
C. cosinus et sinus d'un nombre réel

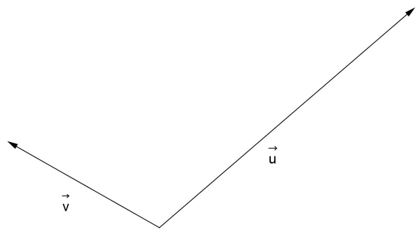
II. Angles orientés

A. Mesures d'un angle orienté

Définition: $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{ON}$ sont deux vecteurs non nuls. Les demi-droites [OM) et [ON) coupent le cercle trigonométrique en A et B. Au couple $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$, on associe une famille de nombres de la forme $\ell+2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), où ℓ est la longueur ($\ell \geqslant 0$) de l'arc de cercle AB, parcouru de A vers B dans le sens direct.

Chacun de ces nombres est une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$.





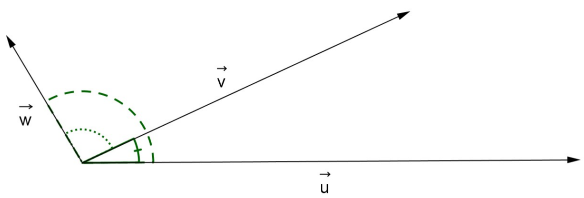
On note $(\vec{u};\vec{v})$ un angle de vecteurs. On écrira $(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{6} mod(2\pi)$.

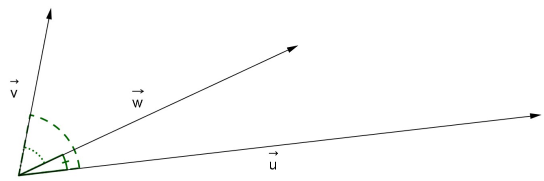
Propriété: Un angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ a une unique mesure α appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$, on l'appelle mesure principale de l'angle.
Les autres mesures sont les réels $\alpha+2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

B. Cosinus et sinus d'un angle orienté

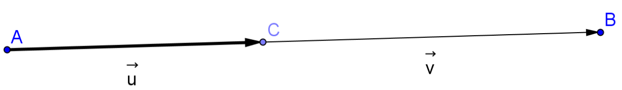
C. Propriétés des angles orientés.

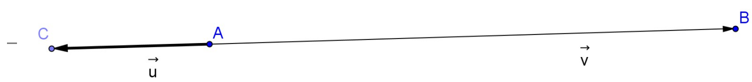
Propriété: $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs non nuls.
$(\vec{v};\vec{u})=-(\vec{u};\vec{v}) mod(2\pi)$
$(\vec{u};\vec{v})+(\vec{v};\vec{w})=(\vec{u};\vec{w}) mod(2\pi)$. (Relation de Chasles)



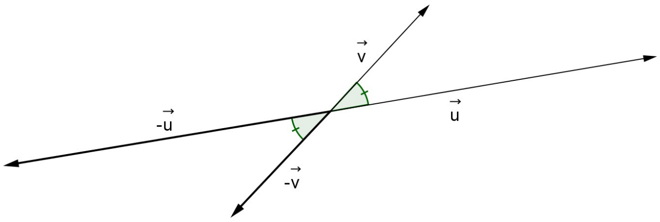


Propriété: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires ⇔ $(\vec{u};\vec{v})=0 \, mod(2\pi)$ ou $(\vec{u};\vec{v})=\pi \, mod(2\pi)$



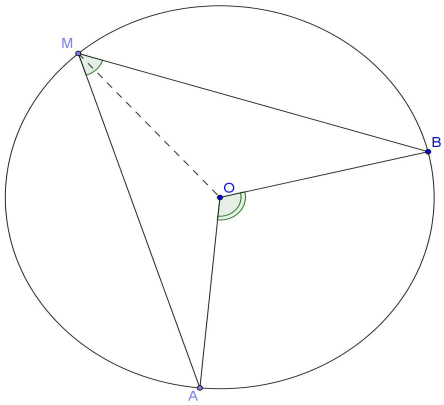


Propriété: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires ⇔ $(-\vec{u};-\vec{v})=(\vec{u};\vec{v})\, mod\,(2\pi)$.



Propriété: Soit C un cercle de centre O passant par A et B. Pour tout point M ($\neq A$ et B) du cercle, on a : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})\, mod\,(2\pi)$.

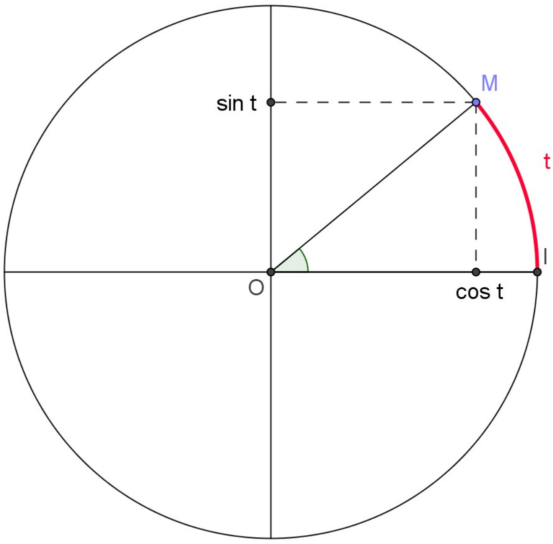
Autrement dit, en divisant par 2 *(y compris le modulo* π *!)*, $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\, mod\,(\pi)$



Démo : On a dans AMO, $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO})+(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA})=\pi\, mod\,(2\pi)$
or $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO})=(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM})$ (triangle isocèle)
donc $2(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO})=\pi-(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA})\, mod\,(2\pi)$ (1)
De même dans OBM, on a $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM})+(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB})=\pi\, mod\,(2\pi)$
or $(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BO})$ (triangle isocèle)
donc $2(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB})=\pi-(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM})\, mod\,(2\pi)$ (2)

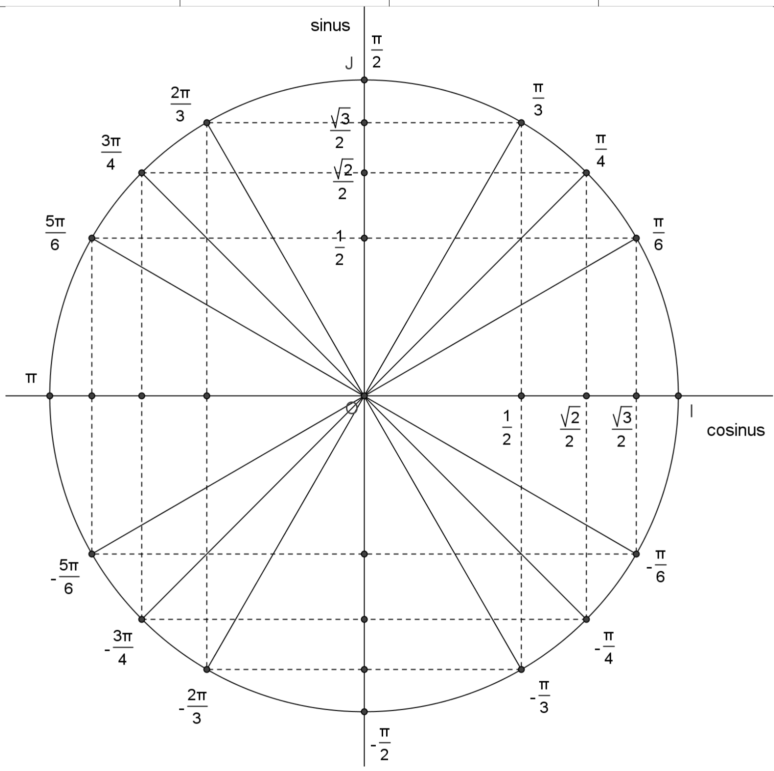
En ajoutant (1) et (2), on obtient : $2(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO})+2(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB})=2\pi-(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})\, mod\,(2\pi)$.
Soit $2(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\, mod\,(2\pi)$

III. Lignes trigonométriques.



A. Valeurs remarquables (à connaître!)

t	0	$\frac{\pi}{6}=30°$	$\frac{\pi}{4}=45°$	$\frac{\pi}{3}=60°$	$\frac{\pi}{2}=90°$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



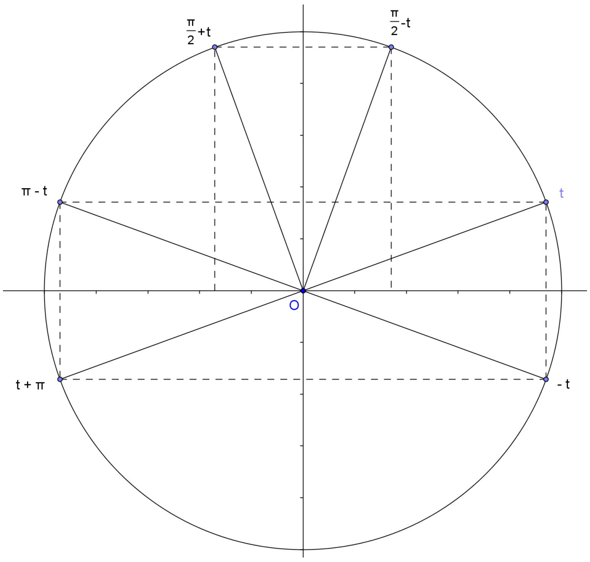
B. Propriétés

Propriétés:

$\cos(t+2k\pi)=\cos t$ $\quad$ $\sin(t+2k\pi)=\sin t$ $\quad$ $\cos^2 t+\sin^2 t=1$

$-1\leqslant\cos t\leqslant 1$ $\quad$ $-1\leqslant\sin t\leqslant 1$ $\quad$ $\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}$

C. Angles associés



A savoir retrouver instantanément ou presque sur le cercle trigonométrique:

$\cos(-t)=\cos t \qquad \sin(-t)=-\sin t$

$\cos(t+\pi)=-\cos t \qquad \sin(t+\pi)=-\sin t$

$\cos(\pi-t)=-\cos t \qquad \sin(\pi-t)=\sin t$

Les formules suivantes sont plus difficiles à retrouver sur le cercle. Si vous avez du mal à les retrouver sur le cercle, apprenez-les:

$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t \qquad \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t$

« $\frac{\pi}{2}-\ldots$ inverse sin et cos. » :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$

D. Équations trigonométriques

On les résout au moyen du cercle trigonométrique (sans oublier les 2kπ.)

<u>Cas particuliers à connaître</u> :

$\cos x=\cos a \iff x=a+2k\pi$ ou $x=\boldsymbol{-a}+2k\pi$

$\sin x=\sin a \iff x=a+2k\pi$ ou $x=\boldsymbol{\pi-a}+2k\pi$.

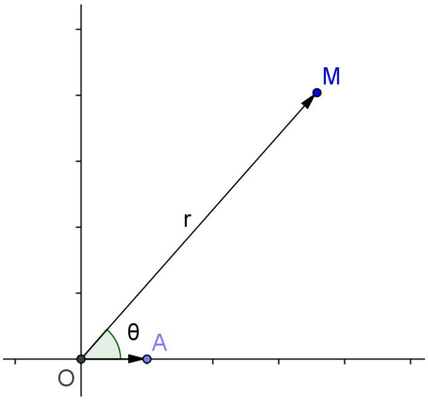
Ne pas oublier les 2kπ et si on a 3x au lieu de x, se rappeler que tout sera divisé par 3, y compris le 2kπ .

E. Formules d'addition et de duplication

Formules d'addition	$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$ *Moyen mnémotechnique:* Sinus est simple et sympa. Cosinus est égoïste et compliqué.
Formules de duplication *(conséquence des précédentes)*	$\forall\ a,\ \sin(2a)=2\sin a\times\cos a$ et $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

IV. Repérage polaire d'un point du plan. [plus au programme]

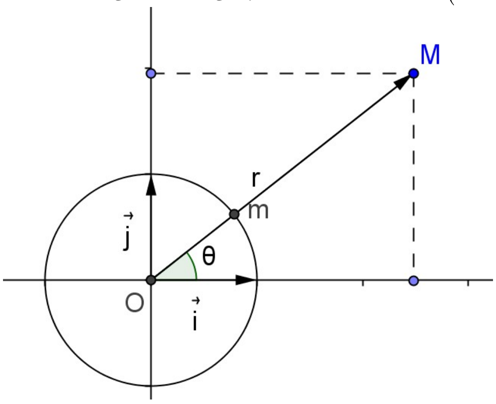
Définition : Soit un point M du plan ($M \neq O$) et $\vec{i}$ un vecteur unitaire.
Un couple de coordonnées polaires de M dans le repère $(O;\vec{i})$ est un couple $(r;\theta)$ où r est la distance OM et θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$.



C'est une autre amnière de repérer un point dans le plan.

Propriété : Soit $r\in\mathbb{R}_*^+$, $\theta\in\mathbb{R}$ et $\vec{i}$ un vecteur unitaire et $\vec{j}$ un vecteur unitaire avec $(\vec{i};\vec{j})=\frac{\pi}{2}$.
M a pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ équivaut à $\overrightarrow{OM}=r\cos\theta\,\vec{i}+r\sin\theta\,\vec{j}$.

Démo : $\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{Om}$ *donc* $\overrightarrow{OM}=r(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})=r\cos\theta\,\vec{i}+r\sin\theta\,\vec{j}$



Propriété : Soit $M\neq O$, M a pour coordonnées polaires $(r;\theta)$, M a pour coordonnées cartésiennes $(x;y)$, alors $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

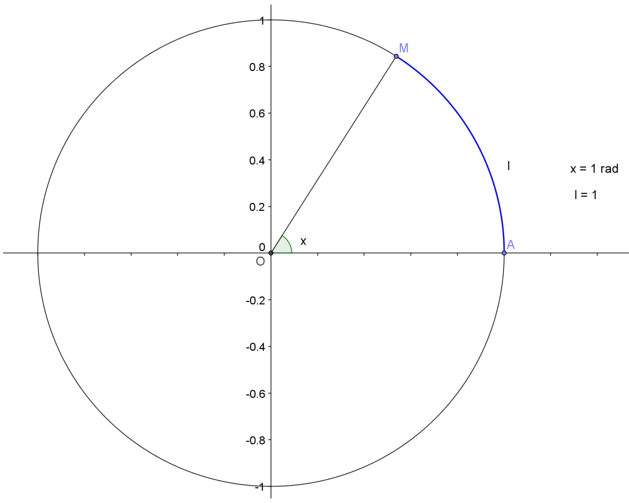
et $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Démo :
avec la démo précédente, on a $\overrightarrow{OM}=r\cos\theta\,\vec{i}+r\sin\theta\,\vec{j}$
donc $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$.

d'où $x^2+y^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2$

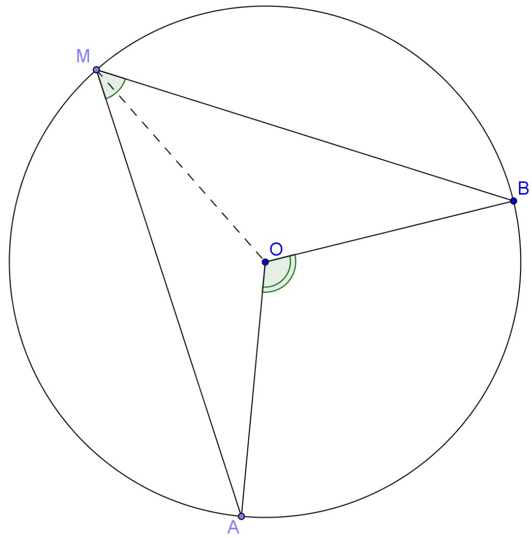
Donc $r=\sqrt{x^2+y^2}$ car $r>0$

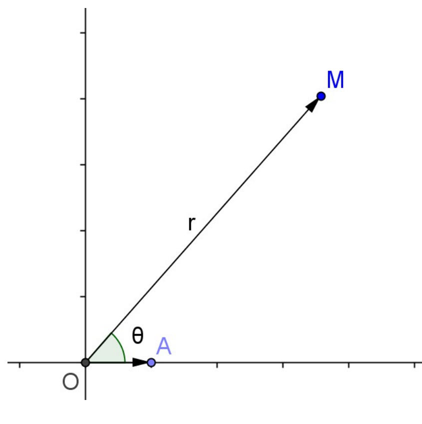
et $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

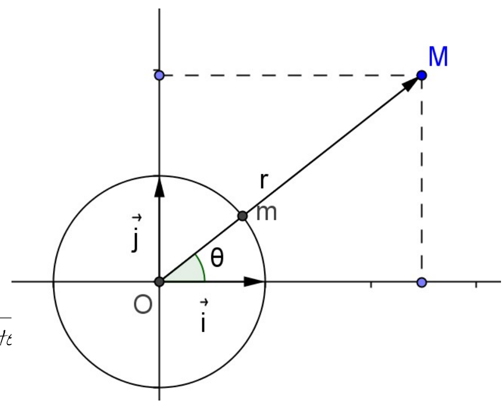


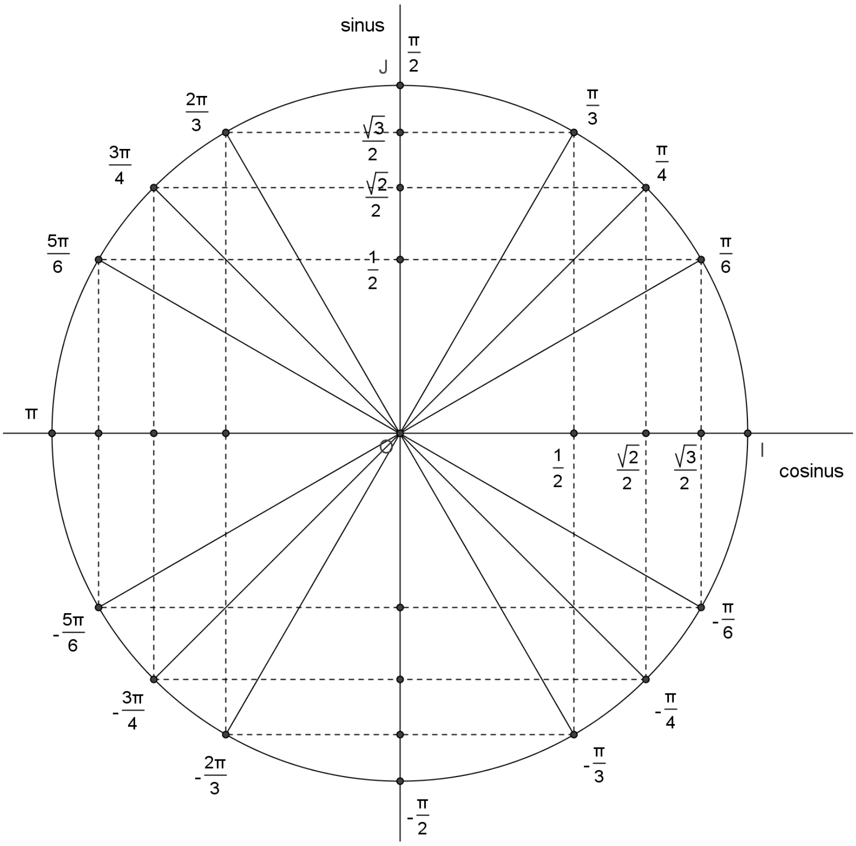
s et placemen
ourmilière au
$=4000$
$_{+1}=u_n\times1{,}05-$
mensuel. v
ur $\begin{cases}v_0=125\\v_{n+1}=v_n\times1\end{cases}$
distincts d'un

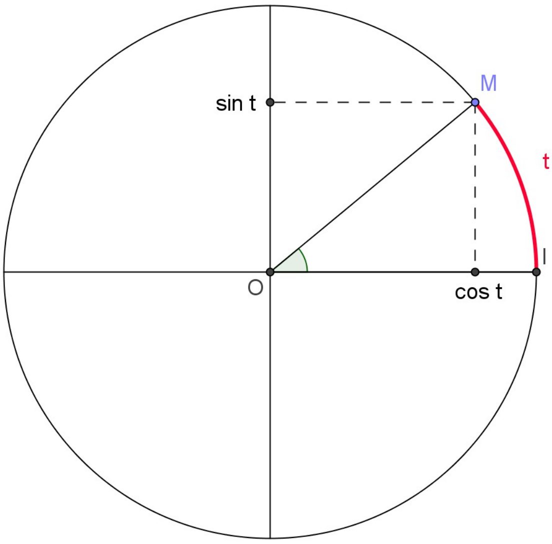
cielle.
ence apparaît
on peut forme











Définition:

$\mathbb{N}=\{0\,;1\,;2\,;3.\,...\}$ est l'ensemble des entiers naturels.

Une *suite numérique* est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (définie à partir d'un certain rang). Autrement dit,

$$u:\begin{cases}\mathbb{N} & \to & \mathbb{R}\\ n & \mapsto & u(n)=u_n\end{cases}$$

Terme d'indice n (par exemple le nombre de fourmis)

Dans $u_n=u(n)$, n est l'indice et u_n est le terme d'indice n .

Indice n (par exemple le nombre de mois écoulés depuis le 1er janvier 2010.)

n ↔ x, $u_n \leftrightarrow f(x)$ et (u_n) ou $u \leftrightarrow f$

Une suite numérique n'est donc rien d'autre qu'une fonction dont le domaine de définition est réduit aux valeurs entières.

Exercice 3. Les suites suivantes, définies par la donnée de leur terme général, sont-elles croissantes, décroissantes, ou ni l'un ni l'autre ?

3) $u_n = -3n+7$; **4)** $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 60 \\ u_0 = 1000 \end{cases}$; **5)** $u_n=(2n-3)^2-4(n^2+5)$; **6)** $u_n = -3 \times 5^n$; **7)** $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{7}{8} + u_n \\ u_0 = 4 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{7}{8} + u_n \\ u_0 = -2 \end{cases}$; **9)** $u_n=2n+5$; **10)** $\begin{cases} u_{n+1}=-2+u_n+\cos(u_n) \\ u_0=-8. \end{cases}$

e est majorée, minorée ou bornée. En effet. Si f est majorée sur $\mathbb{R}^+$ alors est majorée et si f est minorée sur $\mathbb{R}^+$ alors est minorée (réciproques fausses).

♠ *Exercice 4.* Soit la suite (u_n) définie par $u_n=(-1)^n+\frac{1}{n+1}$. Cette suite est-elle majorée, minorée, ou ni l'un ni l'autre? Est-elle bornée ?

♠ *Exercice 5.* Les suites suivantes, définies par la donnée de leur terme général, sont-elles majorées, minorées, ou ni l'un ni l'autre ? Certaines sont-elles bornées ?

1) $u_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$; **2)** $u_n = \frac{n+1}{n}$; **3)** $v_n = \cos(n)$;

Suites en 1S : EXERCICES

Exercice 6. Déterminer le terme général d'une suite récurrente (quand c'est possible).

Soit $(t_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = t_n + 2n + 1$.

1. Calculer les quatre premiers de cette suite.
2. Émettre une conjecture sur l'expression de t_n fonction de *n*.
3. La démontrer.

> *Méthode*: Une suite est entièrement déterminée par son premier terme et la relation de récurrence donc si deux suites ont le même premier terme et si elles satisfont la même relation de récurrence alors elles sont égales.

Exercice 7.

1) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 60 \\ u_0 = 1000 \end{cases}$. Calculer u_{18} et donnez l'expression de u_n en fonction de n .
2) Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3 \\ u_8 = 5 \end{cases}$. Calculer u_{12} et donnez l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 8.

La population d'une ville diminue de 2% par an. En 1996, date du dernier recensement, la ville comptait 486 000 habitants. On note C_{1996} la population de la ville en 1996, C_{1997} la population de la ville en 1997, ...etc. Quelle est la population de cette ville en 2011 ?

Exercice 9. Intérêts composés

Un capital de 6 500 € est bloqué pour 10 ans sur un compte rapportant un intérêt annuel de 4%. A la fin de chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et deviennent à leur tour générateur d'intérêts. On parle alors d'*intérêts composés*. On appelle C_0 le capital de départ et pour $n \geq 1$, on appelle C_n le capital figurant sur le compte au bout de la n$^{\text{ème}}$ année (après le versement des intérêts).

1) Exprimer C_{n+1} en fonction C_n de pour $n \geq 1$.
2) Quel sera le capital au bout de 5 ans ?
3) Avec la calculatrice, déterminer le nombre d'années nécessaires pour que le capital ait augmenté d'au moins 50%.

Exercice 10. Prime de Noël 2

La directrice d'une entreprise décide d'allouer à ses employés une prime de Noël d'un montant de 400 €, cette prime étant revalorisée chaque année de 2%. On note p_0 la prime initiale et p_n la prime au bout de n années ($n \geq 1$)

- Calculer p_1 et p_2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
- En déduire l'expression de p_n en fonction de *n*.
- Quel est le montant de la prime au bout de 10 ans ?
- Quel est le montant total de toutes les primes versées à une personne jusqu'à cette 10$^{\text{ème}}$ année incluse ?

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{u_n + 1} \end{cases}$. Faire une conjecture sur les suites $(u_{2n})_{n \geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant 0}$ et les prouver. Que se passe-t-il si on choisit une autre valeur de u_0 ?

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 11. $(u_{2n})_{n \geqslant 0}$ suites et $(u_{2n+1})_{n \geqslant 0}$ sont constantes quel que soit u_0 .

Suites en 1S : TICE

	A	B	C
1	n	u_n	$1/u_n$
2	0	1	1
3	1	0,71429	1,4
4	2	0,55556	1,8
5	3	0,45455	2,2
6	4	0,38462	2,6
7	5	0,33333	3
8	6	0,29412	3,4
9	7	0,26316	3,8

♠ Exercice 1. On considère la suite u définie par $u_0=1$ et pour tout entier n, .

u est définie par récurrence et on souhaite trouver une formule explicite pour u_n. Comme on ne voit pas comment faire directement, on utilise une suite auxiliaire bien choisie v qui nous permettra d'atteindre ce but.

1) Conjectures au moyen d'un tableur :

d) A l'aide d'un tableur, calculer les 50 premiers termes de la suite u.

e) Quelles conjectures peut-on formuler sur le signe de u_n et le sens de variation de u ? La suite u semble-t-elle se rapprocher d'une valeur quand n tend vers $+\infty$, c'est à dire quand n devient très grand?

f) Calculer les 50 premiers termes de la suite v définie par $v_n=\frac{1}{u_n}$. Quelle conjecture peut-on formuler sur la nature de v ?

2) Signe de u_n : Prouvez votre conjecture sur le signe de u_n.

3) Étude de la suite v :

a) Prouvez votre conjecture sur la nature de v. Préciser la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n. *(On a donc obtenu une formule explicite pour v_n).*

4) Étude de la suite u :

a) Exprimer u_n en fonction de n. *(On a donc obtenu une formule explicite pour u_n. Victoire!).*

b) Étudier le comportement quand n tend vers $+\infty$ de v puis u.

♠ Exercice 2.

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ par $u_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. (*Cette dernière notation se lit « somme de k=1 jusqu'à n des 1 sur k ».*)

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite u.

2) Sens de variation de la suite u :

a) Donner la relation de récurrence qui exprime u_{n+1} en fonction de u_n.

b) En déduire que la suite est croissante, c'est à dire que chaque terme de la suite est plus grand que celui qui le précède.

3) Programmation du calcul d'un terme de la suite u (boucle FOR) :

a) Écrire un programme qui demande n et qui affiche u_n au moyen d'une boucle FOR : « For k= 1 to ... ».

b) En déduire une valeur approchée à 0,1 près de u_{50}, u_{100} et u_{1000}.

4) Programmation du calcul de l'indice à partir duquel u_n dépasse une valeur donnée.

On admet que quand n tend vers $+\infty$, c'est à dire quand n devient très grand u_n finit par dépasser n'importe quelle valeur fixée d'avance.

Écrire un programme qui demande M et qui affiche le rang à partir duquel u_n dépasse M. En déduire le rang à partir duquel $u_n \geqslant 3$ et le rang à partir duquel $u_n \geqslant 5$ (et et le rang à partir duquel $u_n \geqslant 10$ si votre machine en est capable!)

Éléments de réponse pour l'exercice 1.

$v_{n+1}=v_n+\frac{2}{5}$; $v_n=1+\frac{2n}{5}$; $u_n=\frac{5}{5+2n}$

Éléments de réponse pour l'exercice 2.

$u_1=1$; $u_2=\frac{3}{2}$; $u_3=\frac{11}{6}\approx 1{,}83$; $u_4=\frac{25}{12}\approx 2{,}08$.

Programme qui demande *n* et qui affiche u_n au moyen d'une boucle FOR : « For k= 1 to ... » :

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR u+1/k
    FIN_POUR
  AFFICHER "u_n = "
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

Applications :

$u_{50}\approx 4{,}4992$; $u_{100}\approx 5{,}1874$; $u_{1000}\approx 7{,}4854709$

Programme qui demande M et qui affiche le rang à partir duquel u_n dépasse M :

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  M EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE M
  u PREND_LA_VALEUR 1
  k PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (u<M) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    u PREND_LA_VALEUR u+1/k
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "u_n > M dès que n ="
  AFFICHER k
FIN_ALGORITHME
```

Applications :

$u_n\geqslant 3$ dès que $n\geqslant 11$.
$u_n\geqslant 5$ dès que $n\geqslant 83$.
$u_n\geqslant 6$ dès que $n\geqslant 227$.
$u_n\geqslant 10$ dès que $n\geqslant 12367$.
$u_n\geqslant 12$ dès que $n\geqslant 91380$.