♠ **Activité d'introduction des notions. Tireur d'élite ?** Source : Site de G. Costantini

Grégoire a pris des cours de tirs à l'issue desquels la probabilité qu'il atteigne sa cible est $p=\frac{3}{4}$.

1) On suppose qu'il fait deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès obtenus. (X = 0, 1 ou 2)

Calculer la probabilité des événements [X = 0], [X = 1] et [X = 2]. (On pourra s'aider d'un arbre pondéré et on désignera par S les succès et E les échecs).

2) On suppose maintenant qu'il fait six tirs et on note Y le nombre de succès obtenus. ($Y \in \{0 ; 1 ; ... ; 6\}$)

On voudrait calculer la probabilité de l'événement [Y = 4].

a) Peut-on encore facilement raisonner à l'aide d'un arbre ?

b) Calculer la probabilité qu'il commence par quatre succès suivis de deux échecs.

c) Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre. Parmi les "mots" de six lettres qui ne contiennent que des S et des E, combien contiennent exactement quatre fois la lettre S ?

d) En déduire la probabilité de l'événement [Y = 4].

♠ **Activité d'introduction des notions. Tireur d'élite ?** Source : Site de G. Costantini

Grégoire a pris des cours de tirs à l'issue desquels la probabilité qu'il atteigne sa cible est $p=\frac{3}{4}$.

1) On suppose qu'il fait deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès obtenus. (X = 0, 1 ou 2)

Calculer la probabilité des événements [X = 0], [X = 1] et [X = 2]. (On pourra s'aider d'un arbre pondéré et on désignera par S les succès et E les échecs).

2) On suppose maintenant qu'il fait six tirs et on note Y le nombre de succès obtenus. ($Y \in \{0 ; 1 ; ... ; 6\}$)

On voudrait calculer la probabilité de l'événement [Y = 4].

a) Peut-on encore facilement raisonner à l'aide d'un arbre ?

b) Calculer la probabilité qu'il commence par quatre succès suivis de deux échecs.

c) Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre. Parmi les "mots" de six lettres qui ne contiennent que des S et des E, combien contiennent exactement quatre fois la lettre S ?

d) En déduire la probabilité de l'événement [Y = 4].

♠ **Activité d'introduction des notions. Tireur d'élite ?** Source : Site de G. Costantini

Grégoire a pris des cours de tirs à l'issue desquels la probabilité qu'il atteigne sa cible est $p=\frac{3}{4}$.

1) On suppose qu'il fait deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès obtenus. (X = 0, 1 ou 2)

Calculer la probabilité des événements [X = 0], [X = 1] et [X = 2]. (On pourra s'aider d'un arbre pondéré et on désignera par S les succès et E les échecs).

2) On suppose maintenant qu'il fait six tirs et on note Y le nombre de succès obtenus. ($Y \in \{0 ; 1 ; ... ; 6\}$)

On voudrait calculer la probabilité de l'événement [Y = 4].

a) Peut-on encore facilement raisonner à l'aide d'un arbre ?

b) Calculer la probabilité qu'il commence par quatre succès suivis de deux échecs.

c) Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre. Parmi les "mots" de six lettres qui ne contiennent que des S et des E, combien contiennent exactement quatre fois la lettre S ?

d) En déduire la probabilité de l'événement [Y = 4].

Ch 10	Loi binomiale	1ère S

Table des matières

I. Épreuve et schéma de Bernoulli **2**
A. Épreuve de Bernoulli 2
B. Loi de Bernoulli = Loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli 2
C. Schéma de Bernoulli 2

II. Loi binomiale **3**
A. Définition 3
B. Coefficients binomiaux 3
C. Espérance et variance et écart de la loi binomiale 3

III. Propriétés des coefficients binomiaux **4**

Commencer par l'activité d'introduction des notions. *Tireur d'élite ?*

I. Épreuve et schéma de Bernoulli

A. Épreuve de Bernoulli

Définition : Une ***épreuve de Bernoulli*** est une expérience aléatoire qui ne comporte **que deux issues**, l'une appelée <u>S</u>uccès (S) et l'autre <u>E</u>chec (E ou $\bar{S}$)

Exemples :

- *Pour notre tireur de l'activité d'introduction, toucher la cible est un succès.*
- *Jouons aux petits chevaux : On peut considérer le lancer d'un dé à 6 faces comme à une expérience à deux issues, en considérant qu'obtenir un 6 est une des issues (appelée succès) et que l'autre issue est $\bar{S}$ = « ne pas obtenir un 6 » (appelée échec). Et oui ! On n'est pas obligé de considérer le lancer d'un dé à six faces comme une expérience aléatoire à six issues. Le nombre d'issues dépend de l'univers choisi pour modéliser la situation, c'est un choix de celui/celle qui étudie la situation. On choisit en général l'univers le plus simple qui permet de répondre à la question que l'on se pose.*

B. Loi de Bernoulli = Loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli

Définition : Une ***loi de Bernoulli*** est une loi de probabilités définie sur l'ensemble $\Omega=\{S, \bar{S}\}$ des issues d'une épreuve de Bernoulli.
On note p la probabilité d'un succès S (avec $0 \leqslant p \leqslant 1$).
La probabilité d'un échec est donc $1-p$.

Les événements élémentaires	S	$\bar{S}$
Leur probabilité	p	$1-p$

C. Schéma de Bernoulli

• On parle de ***répétition d'épreuves d'épreuves identiques*** lorsque la même expérience aléatoire (notamment avec les mêmes conditions initiales) est répétée plusieurs fois de suite.

• Ces expériences aléatoires successives sont dites ***indépendantes*** si l'issue d'aucune des expériences aléatoires ne dépend de l'issue des autres expériences aléatoires.

Définition : Un ***schéma de Bernoulli*** est une répétition d'épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**.

Exemples :

- *Lancer un dé n fois de suite et considérer que le nombre de succès est le nombre de fois où on obtient un 6 constitue un schéma de Bernoulli. Les épreuves sont indépendantes car le résultat d'un lancé de dés ne dépend pas des lancers précédents.*
- *Pour notre tireur de l'activité d'introduction, tirer n fois de suite et considérer que le nombre de succès est le nombre de fois où il a touché la cible constitue un schéma de Bernoulli.*

♠ Exercice 1. Un jeu consiste à choisir une boule au hasard dans une urne contenant 30 boules blanches et 2 boules noires, on choisit une boule au hasard. On gagne si la boule tirée est noire.

1) Cette expérience aléatoire constitue un . . . . de Bernoulli avec p = ...

2) On tire trois boules dans cette urne sans remise. Est-ce que cette expérience aléatoire constitue un schéma de Bernoulli ? . . . .

3) On tire trois boules dans cette urne avec remise. Est-ce que cette expérience aléatoire constitue un schéma de Bernoulli ? . . . .

II. Loi binomiale

A. Définition

Définition : On considère un schéma de Bernoulli, répétition de n épreuve de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p (p étant la probabilité de succès à chaque épreuve).

On note **X** la variable aléatoire égale au ***nombre de succès lors de ces n épreuves***.

La loi de probabilité de X est appelée ***loi binomiale de paramètres n et p***, où ***n*** est le nombre d'épreuves et ***p*** la probabilité de succès à chaque épreuve.

B. Coefficients binomiaux

Définition : n et k étant des nombres entiers positifs ou nuls avec $k \leqslant n$, le nombre $\binom{n}{k}$ est par définition le nombre de façons de choisir k objets parmi n sans tenir compte de l'ordre. Ce nombre se lit « k parmi n »[1]. Il se note aussi C_n^k.

- Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés ***coefficient binomiaux***.
- Dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli, le nombre de branches réalisant k succès sur les n épreuves est égal à $\binom{n}{k}$.

♠ Exercice 2. Exprimer le nombre de façons de former deux groupes de TP de taille aussi égale que possible dans votre classe en utilisant les coefficient binomiaux. Votre machine peut calculer ce nombre (chercher nCp dans le menu Probas [PRB] ou dans le catalogue)

♠ Exercice 3. Calculer sans machine $\binom{3}{0}$; $\binom{3}{1}$; $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$ puis trouver une formule générale pour $\binom{n}{k}$.

C. Loi binomiale

Propriété : Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, (où ***n*** est le nombre d'épreuves, ***p*** la probabilité de succès à chaque épreuve et X le nombre de succès sur les n épreuves), alors pour tout entier entre 0 et n, la probabilité d'obtenir k succès sur les n épreuves est $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

D. Espérance et variance de la loi binomiale

Propriété (admise): Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, (où ***n*** est le nombre d'épreuves, ***p*** la probabilité de succès à chaque épreuve et X le nombre de succès sur les n épreuves), alors

- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$

[1] Le n est en haut car en anglais, cela si lit « *n choose k* » donc c'est logique de commencer par n puisqu'on lit de haut en bas. En français, du coup, la disposition n'est pas très naturelle vu qu'on dit « *k parmi n* ».

III. Propriétés des coefficients binomiaux

■ Propriétés :

• Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

• Pour tout entiers n et k tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

• Triangle de Pascal : Pour tout entiers n et k tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

■ ***Pourquoi « Triangle de Pascal » ? quel triangle ? C'est qui Pascal?***

Si on place les coefficients binomiaux dans un tableau avec les n en ligne et les k en colonnes, on obtient un triangle et la formule précédente permet de calculer les coefficients de la ligne $n+1$ connaissant ceux de la ligne n . On a donc une formule de récurrence pour calculer les coefficients binomiaux et on peut tous les calculer de proche en proche.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	$\binom{0}{0}=1$					
$n=1$	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$				
$n=2$	$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=2$	$\binom{2}{2}=1$			
$n=3$	$\binom{3}{0}=1$	$\binom{3}{1}=3$	$\binom{3}{2}=3$	$\binom{3}{3}=1$		
$n=4$	$\binom{4}{0}=1$	$\binom{4}{1}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	
$n=5$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$

Évidemment, une fois qu'on a une formule de récurrence pour calculer les coefficients binomiaux, une autre question nous chatouille :

■ ***A-t-on une une formule <u>explicite</u> pour calculer les les coefficients binomiaux ?***

Réponse : Oui et non, car il existe une formule mais elle n'est pas au programme: $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

où, pour tout entier naturel n non nul, le nombre $n!$ (qui se lit « *factorielle n* ») est par définition le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n. Autrement dit, $n! \stackrel{\text{def}}{=} n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\ldots\times3\times2\times1$.

Par exemple (et c'est le retour de notre tireur d'élite), le nombre de chemin de l'arbre pondéré correspondant à exactement 4 succès sur les 6 tirs est $\binom{6}{4}=\dfrac{6!}{4!2!}=\dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)\times(2\times1)}=\dfrac{6\times5}{2}=15$.

♠ Exercice 4. *Pour notre tireur de l'activité d'introduction où n=6, p=3/4 et X est le nombre de fois où il touche la cible sur les 6 essais, compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X :*

k = Nombre de succès	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
P(X=k)							