Ch 11 — Produit scalaire et applications — 1ère S 1

Table des matières

I. Produit scalaire de deux vecteurs

♠ Exercice 1. (à faire à l'oral, tous ensemble, et avant de distribuer le polycopié évidemment!) et visant à expliquer ce que l 'on attend de notre nouvel objet mathématique.

Un âne tire une charrette sur un plan incliné (*dessin au tableau*).

1) Quelles sont les forces qui s'appliquent à la charrette?

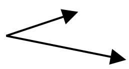
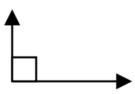
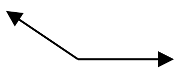
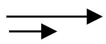
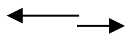
2) Parmi ces forces, certaines favorisent le mouvement en avant, d'autres s'y opposent et d'autres sont neutres: Elles ne freinent pas le mouvement mais ne le favorisent pas non plus. Quelle est la contribution de chaque force au mouvement si l'âne monte la pente? Et si l'âne descend la pente?

On voudrait associer à chaque force un nombre qui indique si la force favorise le mouvement en avant, si elle s'y oppose ou si elle est neutre par rapport à ce mouvement: Il semble naturel d'associer un nombre négatif si la force s'oppose au mouvement, un nombre positif si la force contribue au mouvement en avant et zéro si la force n'a pas d'incidence sur le mouvement.

3) Avec une force de 1 Newton et un déplacement de 1 mètre, cela donne...(*leur faire deviner le cosinus en donnant la valeur du nombre pour les différentes positions de la force et du déplacement: Contribution maximale = 1; opposition maximale = -1...etc*)

4) Avec une force 2 fois plus intense, cela doit donner....(*leur faire deviner le nombre doit être proportionnel à l'intensité de la force.*)

Bilan

Configuration					
Produit scalaire	$\vec{u}\cdot\vec{v}>0$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$	$\vec{u}\cdot\vec{v}<0$	$\vec{u}\cdot\vec{v}$ = produit des normes	$\vec{u}\cdot\vec{v}$ = opposé du produit des normes
On voit donc que le produit scalaire sert à …		Le produit scalaire sert à caractériser les vecteurs orthogonaux.		Avec $\vec{u}=\vec{v}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ Le produit scalaire sert à calculer des normes.	

Les signes vous rappellent-ils une fonction trigonométrique bien connue? Mais si, allez, un effort…

A. Norme d'un vecteur (rappel)

Définition, notation et propriété:

▪ Une unité étant choisie, la norme d'un vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est la distance AB.

▪ On note $\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

▪ Quels que soient le vecteur $\vec{u}$ et le nombre réel λ, $\|\lambda\vec{u}\|=|\lambda|\|\vec{u}\|$ (*mais comment faisait-on avant de connaître la valeur absolue ?*)

B. Définition du produit scalaire à l'aide des normes uniquement

Définition : [Expression 1 du produit scalaire]

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on appelle ***produit scalaire*** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le **nombre réel** noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et défini par $\vec{u}\cdot\vec{v} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$.

Remarque : Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre** réel et non un vecteur. C'est bien pour cela que cette opération s'appelle produit *scalaire* car «*scalaire*» veut dire «*nombre, par opposition à vecteur*». (On verra plus loin le pourquoi du mot « *produit* » dans « *produit scalaire* ».)

♠ Exercice 2. Soit ABC un triangle tel que AB = 5, AC = 3 et BC = 6. Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

♠ Exercice 3. L'ordre des vecteurs est-il important quand on calcule leur produit scalaire? Autrement dit, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\vec{v}\cdot\vec{u}$ sont-ils égaux quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

C. Le produit scalaire permet de caractériser les vecteurs orthogonaux

♠ Exercice 4. Déterminer tous les cas où $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Et voilà pourquoi on a la définition suivante :

Définition: Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***orthogonaux*** si l'un des deux est nul ou si leurs directions sont orthogonales (c'est à dire portées par des droites perpendiculaires).
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux se note $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Caractérisation de l'orthogonalité : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

D. Expression du produit scalaire à l'aide des coordonnées dans un repère orthonormé

Propriété : [Expression 2 du produit scalaire]

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées cartésiennes respectives $\vec{u}(x,\ y)$ et $\vec{v}(x',\ y')$ dans un repère **orthonormé**, alors $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'.}$

♠ Exercice 5. *Démonstration*

Remarques:

- Ce résultat est indépendant du repère orthonormé choisi. C'est fou, non? Si on change de repère orthonormé, x, x', y et y' changent mais par contre le nombre $xx'+yy'$ est toujours le même!
- Cette formule n'est valable que si le repère est orthonormé.
- Cette formule est très commode pour savoir si deux vecteurs dont on connaît les coordonnées das un repère orthonormé sont orthogonaux. Elle peut donc servir à prouver qu'un angle est droit ou que deux droites sont perpendiculaires.

♠ Exercice 6. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B, C et D définis par leurs coordonnées cartésiennes $A(3;-2)$, $B(1;4)$, $C(7;6)$ et $D(9;0)$.
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?

♠ Exercice 7. [Utiliser le produit scalaire pour déterminer si un triangle est rectangle]

Soient $A(-2;-3), B(1;1), C(-3;-1), D(-4;2), E(-1;-3)$ et $F(2;-1)$ dans un repère orthonormé. Les triangles ABC et FDE sont-ils rectangles en C et E respectivement ?

E. Expression du produit scalaire à l'aide des normes des vecteur et du cosinus de l'angle qu'ils forment

Propriété [Expression 3 du produit scalaire]:
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

♠ Exercice 8. *Démonstration. Coup de pouce : Un repère orthonormé bien choisi peut vous aider...*

Remarques:

- On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls car lorsque $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ n'est pas défini.
- Le chapeau sur l'angle n'est pas indispensable, il est juste là pour que tout le monde réalise bien qu'il s'agit d'un angle.
- Que l'on mette l'ange orienté ou l'angle géométrique dans la formule ne change rien car un angle orienté et son opposé ont le même cosinus.

Le cas particulier des vecteurs colinéaires

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

♠ Exercice 9. *Démonstration*

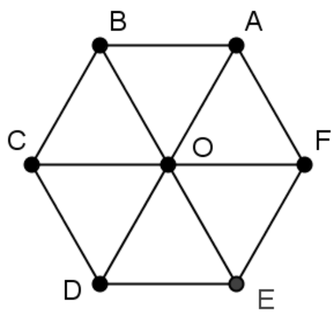
♠ Exercice 10. ABCDEF est un hexagone régulier direct de côté a et de centre O. Calculer chacun des produits scalaires suivants:

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$

c) $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EB}$ d) $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{EB}$

e) $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{EA}$ f) $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AE}$

g) $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{EF}$



♠ Exercice 11. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan; on désigne par α une mesure en radian de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$. Sachant que $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{3}\|\vec{u}\|$, déterminer α.

♠ Exercice 12. Calculer un angle au moyen du produit scalaire.
Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B et C définis par leurs coordonnées cartésiennes $A(1;3)$, $B(4;-2)$, et $C(-1;3)$.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et en déduire une valeur approchée de $\widehat{BAC}$ en degré, à 0,1 degré près.

♠ Exercice 13. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls; on désigne par α une mesure en radian de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

a) $\|\vec{u}\|=5$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=10$ et $\|\vec{v}\|=4$. Déterminer α.

b) $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{12}$ et $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Déterminer $\|\vec{v}\|$.

F. Règles de calcul (Bilinéarité)

Propriété : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs du plan et k un réel alors :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$. (le produit scalaire est *symétrique*)
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (le produit scalaire est *linéaire*)
- Par symétrie, on a bien sûr $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

… et voilà pourquoi cette opération s'appelle produit scalaire: Elle a des propriétés qui ressemblent à celles du produit de deux réels comme la distributivité par rapport à l'addition (dans le même ordre d'idée, voir aussi les identités remarquables un peu plus bas).

♠ Exercice 14. *Démonstration*

Carré scalaire d'un vecteur: Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$. Ce nombre est appelé ***carré scalaire*** de $\vec{u}$ et est aussi noté $\vec{u}^{\,2}$.

La notation peut être troublante: $\vec{u}^{\,2} \overset{\text{def}}{=} \vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ est un scalaire, pas un vecteur! Mais comme le produit scalaire se comporte comme le produit habituel, on a décidé de le noter avec les mêmes notations.

G. Identités remarquables

Le produit scalaire se comporte comme le produit des réels et on a des identités remarquables qui ressemblent aux identités remarquables habituelles :

♠ Exercice 15. Prouvons-le!

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs quelconques du plan, développer les expressions suivantes (a) $(\vec{u}+\vec{v})^2$ (b) $(\vec{u}-\vec{v})^2$ (c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ puis expliquer la phrase d'introduction de ce paragraphe.

Identités remarquables : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs du plan, on a les égalités suivantes :

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$ ou $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$ ou $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^{\,2}-\vec{v}^{\,2}$ ou $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

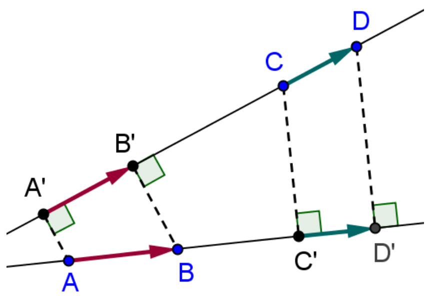
♠ Exercice 16. Prouvez que quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$. On aurait d'ailleurs pu prendre cette formule comme définition du produit scalaire.

♠ Exercice 17. Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de même norme alors les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux. Étudier la réciproque. Faire le lien avec une propriété d'un quadrilatère bien connu.

H. Expression du produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal

Le théorème suivant permet de ramener le calcul du produit scalaire de deux vecteurs quelconques à celui du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires, qui est en général plus facile.

Propriété [Expression 4 du produit scalaire]:
Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs son nuls et soient C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$



♠ Exercice 18. *Démonstration. Chasles es-tu là ?*

Remarques:

- De façon symétrique, en considérant les projetés orthogonaux de A et B sur la droite (CD), on obtient $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{CD}$
- Par abus de langage, on dit que $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur $\overrightarrow{AB}$ (sur la droite (AB) en réalité). On peut alors reformuler la propriété précédente sous la forme :

Propriété. Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, on peut remplacer l'un des vecteurs par son projeté orthogonal sur l'autre vecteur.

♠ Exercice 19. ABC est un triangle équilatéral de côté 2. Soit K le milieu de [BC]. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK}$.

♠ Exercice 20.

1) ABC étant un triangle quelconque d'orthocentre H, démontrer les égalités suivantes : $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$.
2) Calculer la valeur de ces produits scalaires lorsque ABC est un triangle équilatéral de côté a.

Bilan : Nous avons donc maintenant quatre expressions du produit scalaire. Il faut les avoir en tête et choisir la meilleure pour chaque situation !

II. Applications du produit scalaire

A. Application au calcul du travail des forces en physique

▪ Définition : Lorsqu'un objet soumis à une force constante $\vec{F}$ se déplace d'un point A à un point B, on définit le ***travail** de la force lors du déplacement* $\overrightarrow{AB}$ comme le produit scalaire de la force par le déplacement c'est à dire $W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$. (W comme Work en anglais).

▪ Si la force s'oppose au déplacement, autrement dit si elle tend à freiner le mouvement lors de ce déplacement, alors le travail est négatif. On parle de **travail *résistant***.

▪ Si la force a tendance à faire avancer l'objet dans le déplacement, autrement dit si elle tend à accélérer le mouvement lors de ce déplacement, le travail est positif. On parle de **travail *moteur*** (= qui fait avancer).

Remarque : Le travail d'une même force peut être parfois résistant et parfois moteur suivant le déplacement. Ainsi, lorsque que vous montez une côte, il faut lutter contre la gravité et le travail de la force de gravité est négatif. Par contre, lorsque que vous descendez une côte, la gravité vous aide à descendre et le travail de la force de gravité est positif.

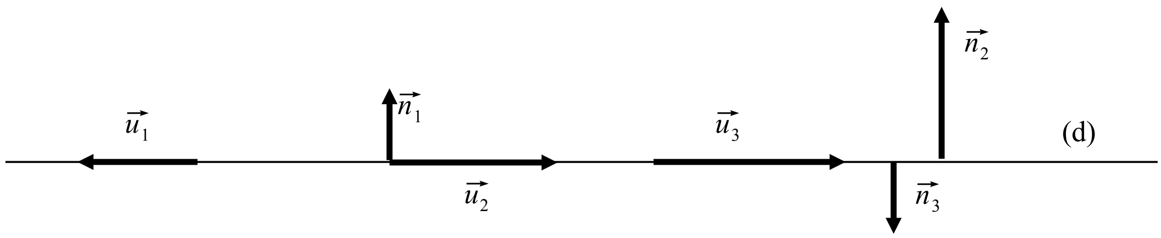
B. Application du produit scalaire aux équations de droites et de cercles

Dans toute cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Équations de droites

Définition : On appelle vecteur *normal* à une droite tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de la droite.

***Vecteur directeur et vecteur normal d'une droite** : Sur le dessin ci-dessous, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont des vecteurs directeurs de la droite (d) et $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ sont des vecteur normaux pour cette droite.*



Propriété : Soit a et b deux réels qui ne sont pas tous les deux nuls.

▪ Dans le plan[1], toute droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $ax+by+c=0$.

▪ Réciproquement, dans le plan, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ est celle d'une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Pratique : Quand on connaît l'équation d'une droite, on donc peut en déduire immédiatement un vecteur directeur et vecteur normal.

Démonstration :

◊ Soit (a ; b) un vecteur normal à une droite $\mathscr{D}$ et $A(x_A;y_A)$ un point de $\mathscr{D}$.

Un point M appartient à $\mathscr{D}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ $\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(x-x_B)=0$

$\Leftrightarrow ax+by+c=0$ avec $c=-ax_A-bx_B$.

[1] *Dans l'espace $ax+by+c=0$ est l'équation d'un plan (dont un vecteur normal a pour coordonnées (a, b, 0)) et non celle d'une droite.*

◊ *Si a et b ne sont pas tous les deux nuls alors l'ensemble des points M(x ; y) tels que* $ax+by+c=0$ *contient au moins un point:* $\begin{cases}\left(0;\ -\dfrac{c}{a}\right) & \text{si } a\neq 0\\ \left(-\dfrac{c}{b};\ 0\right) & \text{si } b\neq 0\end{cases}$. *On nomme A un de ces points. Ses coordonnées vérifient* $ax_A+byA+c=0$.

Or $ax+by+c=ax_A+by_A+c\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

L'ensemble des points cherchés est donc la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

♠ Exercice 21. [Équation d'une hauteur]: Soient $A(1;2)$, $B(4;-1)$ et $C(2;4)$ et Δ la hauteur issue de A dans le triangle *ABC*. Trouver l'équation de Δ .

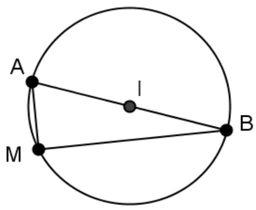
2. Équations de cercles

Propriété : Soit ($\mathscr{C}$) le cercle de centre $\Omega(x_0;\ y_0)$ et de rayon *r*.
Un point *M*(*x* ; *y*) appartient à ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow \Omega M=r\Leftrightarrow \Omega M^2=r^2\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.
On dit que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ est une *équation du cercle (*$\mathscr{C}$*)*

♠ Exemples:

- Le cercle trigonométrique admet comme équation $x^2+y^2=1$.
- Le cercle de centre $A(2;-1)$ et de rayon 3 admet comme équation $(x-2)^2+(y+1)^2=9$.

Propriété : Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points *M* tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$.



Pratique : On n'a donc besoin ni du centre ni du rayon du cercle de diamètre [AB] pour trouver son équation.

♠ Exercice 22. Le repère $(O;\ \vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan. Soient $A(-1;\ 3)$ et $B(2;\ -5)$ deux points du plan. Déterminer l'équation du cercle de diamètre [AB] au moyen du produit scalaire et en déduire les coordonnées de son centre et la distance AB.

♠ Exercice 23. Le repère $(O;\ \vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan. Soient $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$ deux points du plan. Soit (d_1) la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et soit (d_2) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$.

1) Déterminer une équation de (d_1) dans le repère $(O;\ \vec{i},\vec{j})$.
2) Déterminer une équation de (d_2) dans le repère $(O;\ \vec{i},\vec{j})$.
3) Soit (d_3) la droite parallèle à (d_1) passant par B. Déterminer une équation de (d_3) .
4) Soit ($\mathscr{C}$) le cercle de diamètre [AB]. Déterminer une équation de ($\mathscr{C}$).
5) Soit (d_4) la tangente à ($\mathscr{C}$) passant par B. Déterminer une équation de (d_4) .
6) Soit ($\mathscr{C}_1$) le cercle de centre A passant par B. Déterminer une équation de ($\mathscr{C}_1$).

C. Application à la trigonométrie

Formules d'addition: Quels que soient les nombres a et b ,
$\cos(a+b)=cosa\cos b-\sin a\sin b$
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$.

Moyen mnémotechnique :
sinus est simple et sympa
cosinus est égoïste et compliqué

♠ Exercice 24. Démonstration des formules d'addition.

♠ Exercice 25. Calculer $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Formules de duplication: Quels que soient le nombre a,
$\cos(2a)=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$
$\sin(2a)=2\sin a\cos a$

♠ Exercice 26. Démonstration des formules de duplication.

♠ Exercice 27. Prouver que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

♠ Exercice 28. Prouvez que pour tout x pour lequel l'expression est définie $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2$.

♠ Exercice 29. Résoudre $\cos 2x+5\cos x=2$.

D. Applications aux problèmes métriques

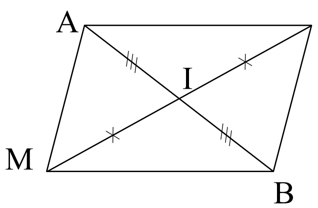
Le théorème de la médiane permet de calculer les longueurs des médianes d'un triangle connaissant les longueurs des côtés.

1. Théorème de la médiane

Théorème de la médiane: Soient A et B deux points du plan et I le milieu de [AB].
Pour tout point M du plan, on a : $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$.

♠ Exercice 30. Démonstration: A vos stylos!

Autre formulation du théorème de la médiane (*plus facile à retenir à mon avis*): Dans tout parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.



◊ La somme des carrés des diagonales = $(2MI)^2+AB^2=4MI^2+AB^2$.

◊ La somme des carrés des côtés = $2MA^2+2MB^2$.

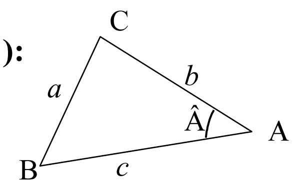
◊ On obtient donc : $2MA^2+2MB^2=4MI^2+AB^2$, et en divisant tout par 2 on retrouve la formule précédente.

♠ Exercice 31. Démontrer que $MA^2-MB^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$.

2. Formule d'Al-Kashi = Théorème de Pythagore généralisé

Formule d'Al-Kashi (Généralisation du Théorème de Pythagore):

Pour tout triangle ABC, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$.

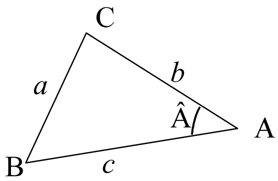


Remarques : Les trois côtés et les trois angles jouant des rôles similaires on a bien sûr:
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$.
et $c^2=a^2+b^2-2bc\cos\widehat{C}$.

La formule d'Al-Kashi permet de calculer les mesures des angles d'un triangle connaissant les longueurs des côtés.
Elle permet aussi des calculs du type Pythagore même si le triangle n'est pas rectangle!

3. Formules liant angles, côtés et aire S d'un triangle

▪ Propriété: $S = \frac{1}{2}\, ab\sin\widehat{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\, bc\sin\widehat{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\, ac\sin\widehat{\mathrm{B}}$.



▪ Loi du sinus ou formule du sinus:

$$\frac{a}{\sin\widehat{\mathrm{A}}} = \frac{b}{\sin\widehat{\mathrm{B}}} = \frac{c}{\sin\widehat{\mathrm{C}}}.$$

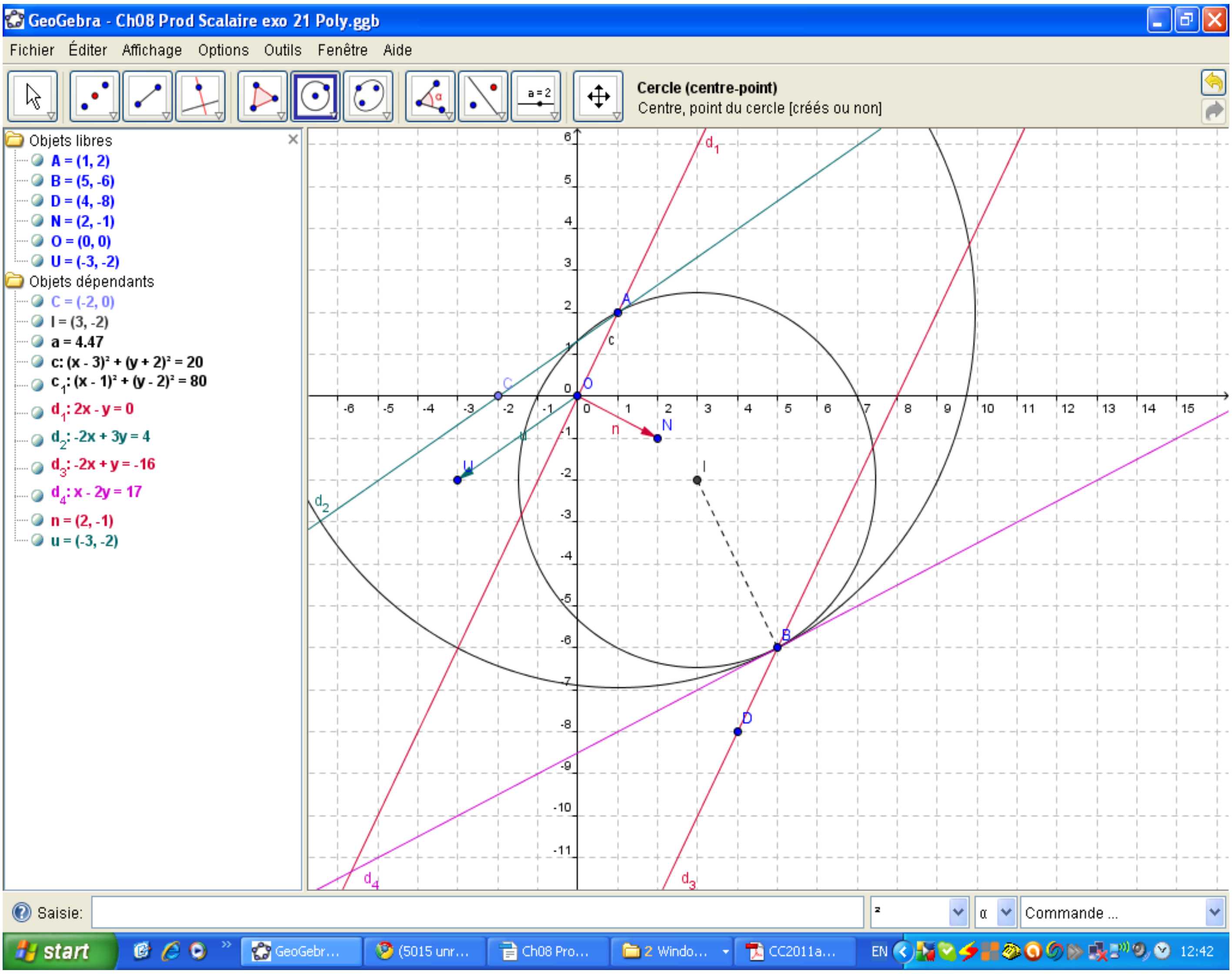
♠ Exercice 32. Démonstration: A vos stylos!

Sources :

▪ Le polycopié de cours de Mme Dubois du LFT (Madagascar) que je tiens à remercier ici,

▪ L'excellent site http://xmaths.free.fr/ de Xavier Delahaye.

▪ Le livre Transmath 2011, ▪ Le livre Math'x, ▪ Le livre Déclic,



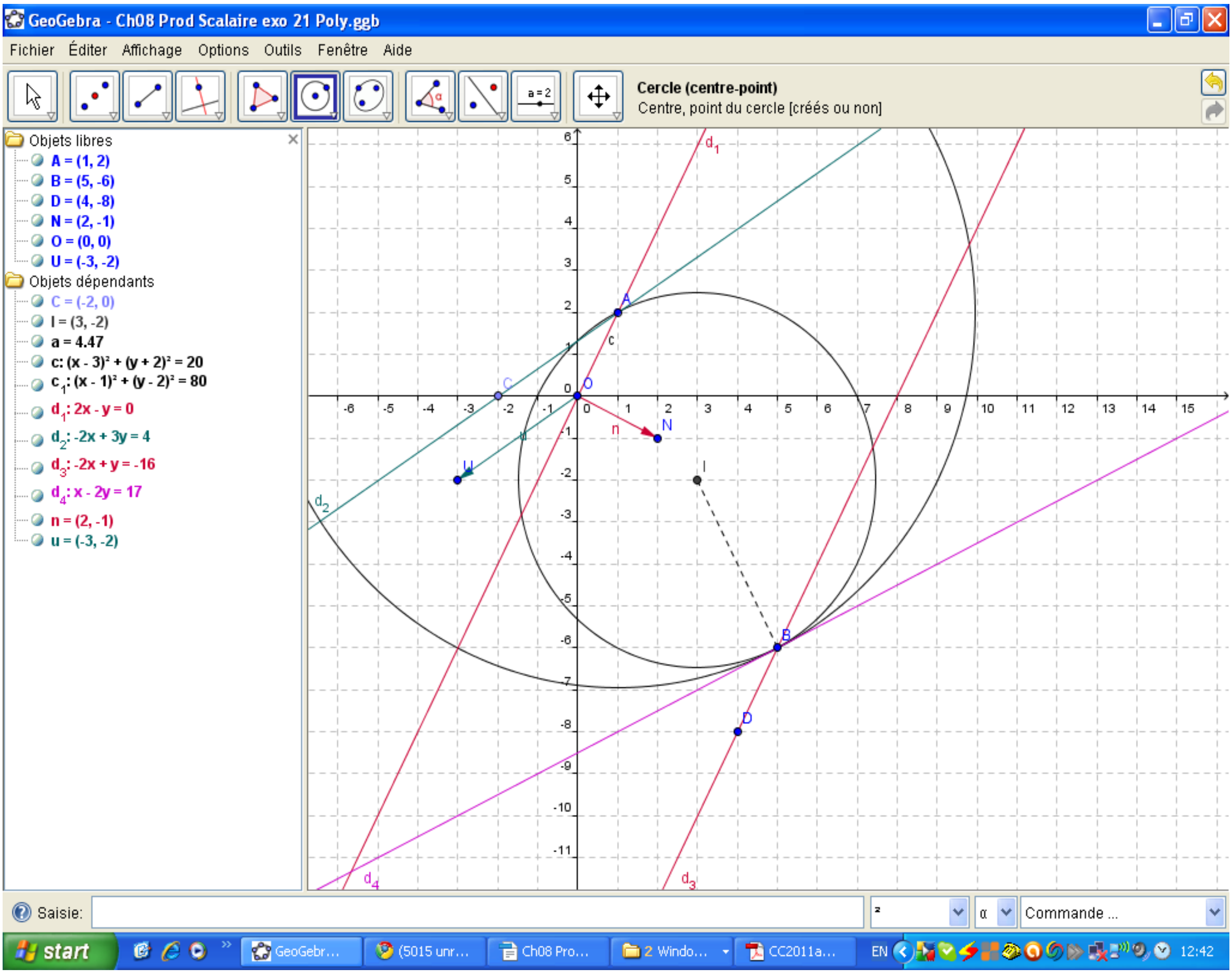
Suggestion de plan de cours de Marc Tenti

Oui, ça tourne bien ainsi,

- partir de la définition en termes de longueurs uniquement,
- qui donne la caractérisation de l'angle droit,
- en déduire au plus vite l'expression analytique dans un RON,
- d'où la bilinéarité,
- qui permet le calcul à l'aide du projeté,
- c'est à dire l'expression avec le cosinus

Mais on peut aussi le faire un peu dans n'importe quel ordre... !

MT "Marc Tenti" mtenti@club-internet.fr



Exercices Produit Scalaire

/5

Exercice 33.

/1,5 **1)** Calculer $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$.

/2,5

Rappel :
Calculatrices INTERDITES.

2) En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

3) En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.