LOGIQUE

Objectif prépa
2009-2010

Exercice 1. Sens des symboles équivalence et implication

Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ou un symbole d'implication barré d'une croix pour dire « n'implique pas ».

N est un nombre entier qui finit 5.

N est un nombre entier qui finit par 0 ou 5.

N est un multiple de 5.

Il existe un entier k tel que N= 5k.

Exercice 2. Equivalent ou pas ?

« (U_n) ne tend pas vers $+\infty$ » $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ « (U_n) bornée »

Exercice 3. Négation d'une proposition

Donner la négation des propositions suivantes.

A = « La suite (U_n) tend vers ℓ. »

B = « La suite (U_n) est majoree. »

C = « La fonction f est injective. »

D = « La fonction f est surjective .»

Exercice 4. Equivalent ou pas ?

Montrer que si (U_n) ne tend pas vers $+\infty$, alors elle admet une suite extraite bornée. Réciproque ?

Exercice 5. Les types de démonstration.

Montrez que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 6. Contraposée.

1) Ecrire la définition de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$:

$\forall \varepsilon > 0, \ldots$

2) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, alors pour toute suite (u_n)de réels de limite x_0, que peut-on dire de la limite de la suite $(f(u_n))$. Prouver-le. Ecrire ce résultat sous la forme « A $\Rightarrow$ B ».

3) Ecrire sa contraposée.

4) Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 7. Les types de démonstration.

Démontrer que le point *(a, b)* est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f si et seulement si pour tout nombre h tel que $a+h$ et a-h sont dans le domaine de définition de *f*, $f(a-h)+f(a+h)=2b$.

Exercice 8. Résolution par équivalence et par implication

Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ou un symbole d'implication barré d'une croix pour dire « n'implique pas »..
Résolution de $\sqrt{2x+3}=x-6$ **:** $\sqrt{2x+3}=x-6$ **.....** $2x+3=(x-6)^2$

Exercice 9.

1) Résolution de $2x-3\sqrt{x}-2=0$. Changement de variable pour se ramener à une équation du second degré: On pose $X=\sqrt{x}$.*A-t-on* $\left(X=\sqrt{x}\right)\overset{?}{\Leftrightarrow}\left(x=X^2\right)$

2) $\dfrac{2x}{(x-4)(x+2)}\geq 1\overset{?}{\Leftrightarrow} 2x\geq (x-4)(x+2)$ **3)** $\dfrac{2x}{(x-4)(x+2)}=1\overset{?}{\Leftrightarrow} 2x=(x-4)(x+2)$

Exercice 10.

Résoudre les équations suivantes

1) $\sqrt{2x+3}=x-6$ **2)** $\dfrac{2x}{(x-4)(x+2)}\geq 1$ **3)** $2x-3\sqrt{x}-2=0$ **4)** $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x}\geq 0$

Point methode :

Resolution par equivalence et par implication

Pour résoudre une équation, *soit* on procède par équivalence et dans ce cas les valeurs obtenues sont forcément solutions, *soit* on procède par implication et dans ce cas il faut vérifier que les valeurs obtenues sont bien solutions (car on a peut-être introduit des solutions parasites.)

Exemple :

■ Solution 1 : Résolution par équivalence

$$\frac{x^2-4}{x+2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4=0\\ x+2\neq 0\end{cases}\quad\text{(équivalence).}$$

Si $x+2\neq 0$, alors l'équation obtenue en multipliant l'équation initiale par $x+2\neq 0$ a exactement les mêmes solutions que l'équation initiale. On a donc obtenu une équation équivalente, ce que traduit le symbole d'équivalence.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\quad ou\quad x=-2\\ x\neq -2\end{cases}\qquad\Leftrightarrow x=2$$

Remarque : les valeurs obtenues sont forcément solutions (sauf erreur de calcul évidemment), il n'y a donc, sur le plan théorique du moins, aucune vérification à faire.

■ Solution 2 : Résolution par implication

$$\frac{x^2-4}{x+2}=0\Rightarrow x^2-4=0\ \text{(implication).}$$

en multipliant l'équation initiale par $x+2$.
[*La multiplication des deux membres de l'inégalité par $x+2$ (sans se demander si $x+2$ peut être nul pour certaines valeurs de x) a peut-être introduit des solutions parasites. On a donc une implication et non une équivalence, d'où le symbole d'implication. En effet, on ne peut revenir à l'équation initiale (en divisant par $x+2$) que si $x+2\neq 0$.*]

$$\Leftrightarrow x=2\quad ou\quad x=-2$$

Les solutions potentielles sont donc $x=2$ et $x=-2$.

● On vérifie que les valeurs obtenues sont solutions [C*ette étape de vérification est indispensable et fait partie intégrante de la méthode de résolution par implication.*]:
2 est solution (remplacer x par 2 dans l'équation) mais $x=-2$ n'est PAS solution car l'équation n'est pas définie pour $x=-2$ donc on l'élimine. L'unique solution est donc $x=2$.

Remarque : La multiplication des deux membres de l'inégalité par $x+2$ a introduit la solution parasite $x=-2$.