D.M. de mathématiques n°1 : *Configurations du plan*	2D4

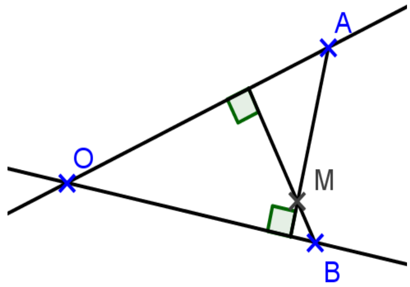
A rendre le mercredi 14 septembre 2011, au début de l'heure

Exercice 1

Les droites (AM) et (BM) sont respectivement perpendiculaires aux droites (OB) et (OA).

1) Démontrer que les droites (OM) et (AB) sont perpendiculaires.

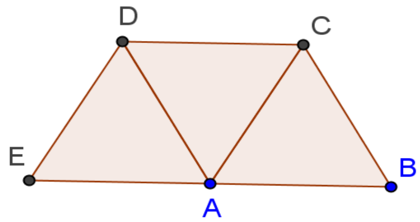
2) Que représente le point B pour le triangle OAM ?



Exercice 2

ABC, ACD et ADE sont trois triangles équilatéraux disposés comme sur la figure ci-contre.

Démontrer que le triangle BCE est un triangle rectangle.



Exercice 3

ABCD est un parallélogramme de centre O , I est le milieu de [AB] et K est le milieu de [CD]. (AK) coupe (BD) en M et (CI) coupe (BD) en N.

1) Faire une figure.

2) Démontrez que BN = NM = MD.

3) Quel rôle joue le point N pour le triangle ABC ?

D.M. n°1 : Configurations du plan CORRIGÉ	2^{nde} 4

Exercice 1.

1) Dans le triangle OAB, les droites (BM) et (AM) sont des hauteurs du triangle AOB puisqu'elles passent par un sommet et qu'elles sont perpendiculaires à la droite qui porte le côté opposé. Le point M, qui est leur point d'intersection est donc l'orthocentre du triangle AOB.

La droite (OM) qui passe par l'orthocentre du triangle AOB et par le sommet O est donc la troisième hauteur du triangle. Elle est donc perpendiculaire à la droite qui porte le côté opposé, c'est à dire (AB).

2) Dans le triangle OAM, la droite (OB) passe par le sommet O et elle est perpendiculaire à (AM), la droite qui porte le côté opposé au point O : C'est donc une hauteur du triangle OAM. De même, (MB) qui passe par B et qui est perpendiculaire à (OA) est donc une hauteur du triangle OAM.

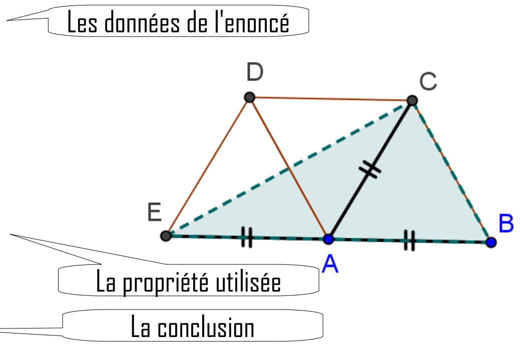
B est donc le point d'intersection de deux hauteurs du triangle OAM. C'est donc l'<u>orthocentre</u> du triangle OAM.

Exercice 2

Les triangles ABC, ACD et ADE étant équilatéraux, on a $AE=AC=AB$. A est donc le centre du cercle circonscrit au triangle BCE.

Tout triangle inscrit dans un demi-cercle dont le diamètre est un des côtés du triangle est rectangle. [*voir votre livre, page 248*]. Autrement dit, si le centre du cercle circonscrit à un triangle appartient à un des côtés de ce triangle, alors le triangle est rectangle.

C'est le cas ici, donc le triangle BCE est rectangle.

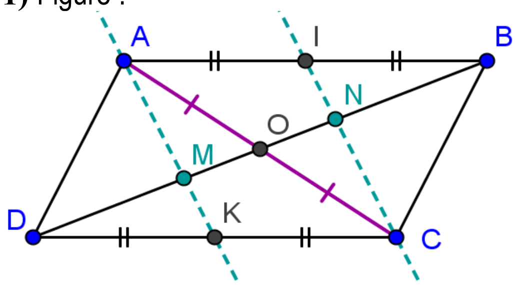


Autre méthode (seulement les idées essentielles): ACDE est un losange car il a 4 côtés égaux. La diagonale (EC) est donc aussi bissectrice donc $\widehat{ECA}=60\div 2=30°$, d'où $\widehat{ECB}=\widehat{ECA}+\widehat{ACB}=30°+60°=90°$.

Exercice 3

ABCD est un parallélogramme de centre O, I est le milieu de [AB] et K est le milieu de [CD]. (AK) coupe (BD) en M et (CI) coupe (BD) en N.

1) Figure :



2) Démontrez que BN = NM = MD.

O est le milieu de [AC] car dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.

Dans le triangle ACD, (AK) et (OD) sont deux médianes donc M, qui est leur point d'intersection, est le centre de gravité du triangle ACD. De même, N est le centre de gravité du triangle ABC.
On sait que dans tout triangle, le centre de gravité est situé aux deux tiers à partir du sommet donc $DM=\frac{2}{3}DO$ $OM=\frac{1}{3}DO$, $NB=\frac{2}{3}OB$ et $NO=\frac{1}{3}OB$. Par ailleurs, O est le milieu de [BD] car dans un parallélogramme, les diagonales de coupent en leur milieu, d'où $OB=DO$.

On en déduit que $MD=NB$. De plus, $MN=MO+ON=\frac{1}{3}OB+\frac{1}{3}OD=\frac{1}{3}OB+\frac{1}{3}OB=\frac{2}{3}OB=BN$.

Finalement, <u>BN = NM = MD</u>.

Autre méthode (seulement les idées essentielles): AICK est un parallélogramme car il a 2 côtés parallèles et de même longueur. Puis on conclut en utilisant le théorème de la droite des milieux (ou Thalès) dans CDN (ce qui donne M milieu de [DN], d'où DM=MN) et ABM (ce qui donne M milieu de [BM], d'où MN=NB).

3) Quel rôle joue le point N pour le triangle ABC ?

<u>N est le centre de gravité du triangle ABC</u>. En effet, dans le triangle ABC, (IC) et (OB) sont deux médianes donc N, qui est leur point d'intersection, est le centre de gravité du triangle ABC.