D.M. n°1 : Complément sur les dérivées	TS1

A rendre le mercredi 18 septembre 2013

1 seul exercice

Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± – Technique : + ± – Raisonnement : + ± –	Note : $\frac{}{5}$

Rappel : La rédaction des DM doit être individuelle.

Soit f la fonction définie par $f(x)=(x+1)\sqrt{1-x^2}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer son domaine de définition.

2) Prouver que f est dérivable sur $]-1;1[$ et déterminer l'expression de sa dérivée sur cet intervalle.

3) a) f est-elle dérivable en -1 ?

b) f est-elle dérivable en 1 ? *On pourra utiliser le fait que si une quantité X tend vers 0 en restant positive alors* $\frac{1}{X}$ *tend vers* $+\infty$ *(ce qui est intuitif au vu de la courbe de la fonction inverse). On note ce résultat sous la forme* $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}}\frac{1}{X}=+\infty$.

4) Déterminer les extremums de f sur son domaine de définition.

5) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$. On note $T_{\frac{1}{3}}$ cette tangente.

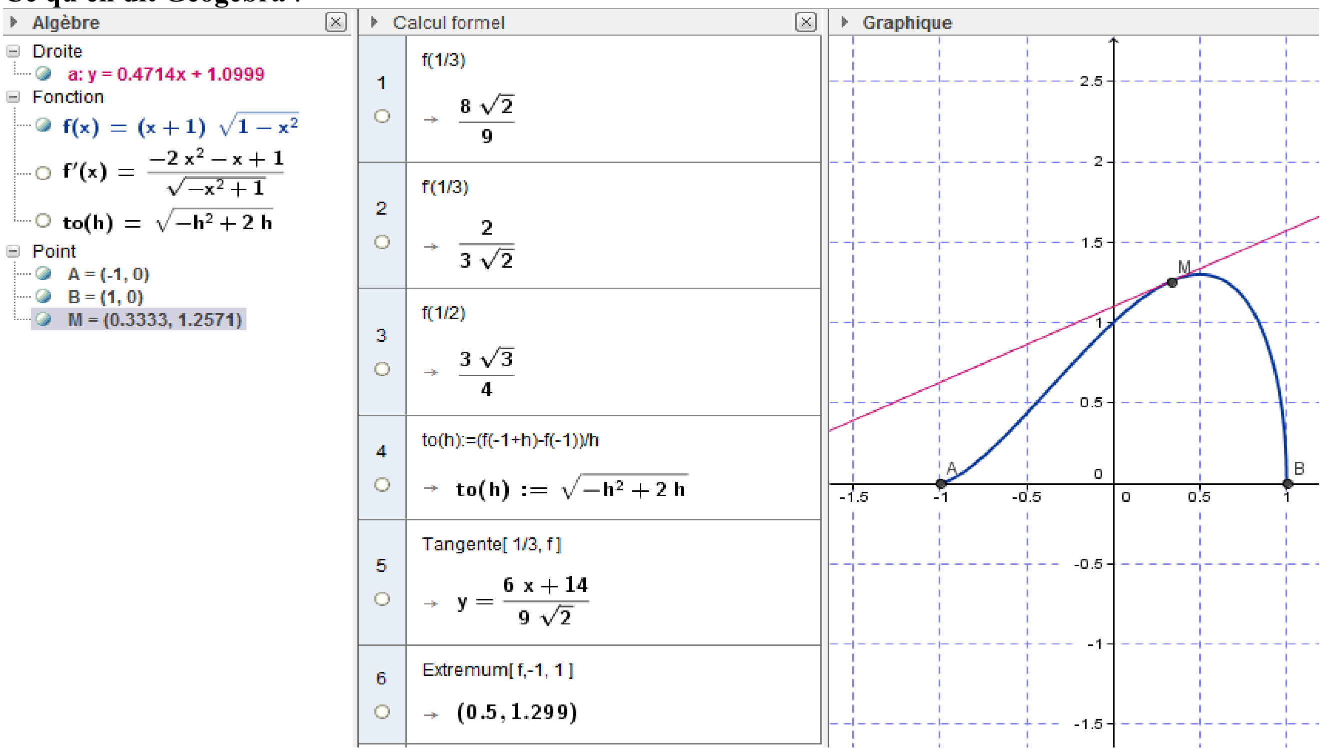
Coup de pouce : Vérifiez vos résultats ! Si votre calculatrice ne calcule ni les dérivées ni les limites, utilisez :

- *Geogebra (qui est personnellement mon préféré et qui est gratuit!) le fait, faire afficher la colonne "calcul formel". A télécharger à* http://www.geogebra.org/cms/fr/
- *Le logiciel de calcul formel Xcas le fait aussi et il est gratuit ; vous pouvez le télécharger ou l'utiliser en ligne à* www.xcasenligne.fr *(Cliquez sur la baguette magique et l'assistant vous guidera)*
- *ou la* calculatrice de fonctions de WIMS *: (Attention ! pour avoir un affichage lisible, il faut utiliser le navigateur Firefox!)*

(Allez sur le site des mathématoqués pour avoir des liens actifs)

Corrigé

Ce qu'en dit Geogebra :



Soit f la fonction définie par $f(x)=(x+1)\sqrt{1-x^2}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Domaine de définition. $f(x)$ est définie ssi $1-x^2\geqslant 0$. Or $1-x^2$ est un polynôme du second degré, il est donc du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de ses racines -1 et 1, d'où $\mathrm{D}_f=[-1\,;1]$.

2) Dérivabilité sur]-1 ; 1[. Sur $]-1\,;1[$, la fonction $x\mapsto 1-x^2$ est dérivable et strictement positive donc la fonction $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur cet intervalle. Comme la fonction $x\mapsto 1+x$ est elle aussi dérivable sur cet intervalle, par le théorème sur la dérivée d'un produit, on déduit que f est dérivable sur $]-1\,;1[$ avec pour dérivée $f'(x)=\sqrt{1-x^2}+(x+1)\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-x^2-x^2-x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$

Vérification :
C'est bien ce que dit Geogebra

Sur $]-1,1[$, f est dérivable avec pour dérivée $f'(x)=\dfrac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) a) Pour savoir si f est dérivable en -1, on calcule la limite du taux de variations en -1. Comme f n'est définie que si $-1+h\geqslant -1$, dans tout ce qui suit $h>0$.

$\tau_{-1}(h)=\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\dfrac{(-1+h+1)\sqrt{1-(-1+h)^2}-0}{h}=\dfrac{h\sqrt{-h^2+2h}}{h}=\sqrt{-h^2+2h}$. Lorsque h tend vers 0, le taux de variations tend vers 0 donc f est dérivable en -1 et $\boxed{f'(-1)=0}$.

<u>Vérifications</u> : (1) Geogebra donne le taux simplifié qui est bien celui que nous avons trouvé et (2) Sur la figure fournie par la calculatrice ou Geogebra, il semble bien que la courbe admet une tangente horizontale (donc de coefficient directeur 0) en -1.

b) Pour savoir si f est dérivable en 1, on calcule la limite du taux de variations en 1. Comme f n'est définie que si $1+h\leqslant 1$, dans tout ce qui suit $h<0$.

$\tau_1(h)=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{(1+h+1)\sqrt{1-(1+h)^2}-0}{h}=\dfrac{(2+h)\sqrt{-h^2-2h}}{h}=\dfrac{(2+h)\sqrt{-h}\sqrt{h+2}}{\sqrt{-h}\sqrt{-h}}=\dfrac{(2+h)\sqrt{h+2}}{\sqrt{-h}}=(2+h)\sqrt{h+2}\times\dfrac{1}{\sqrt{-h}}$

que l'on peut écrire $\tau_1(h)=(2+h)\sqrt{h+2}\times\dfrac{1}{\sqrt{-h}}$. [Remarque : Comme $h<0, -h>0$.]

- La quantité $(2+h)\sqrt{h+2}$ tend $2\sqrt{2}$ vers lorsque h tend vers 0.
- Par ailleurs, lorsque h tend vers 0 en étant négatif, $\sqrt{-h}$ tend vers 0 en étant positif. Or si une quantité X tend vers 0 en restant positive alors $\dfrac{1}{\mathrm{X}}$ tend vers $+\infty$. $\dfrac{1}{\sqrt{-h}}$ tend donc vers $+\infty$.

Le produit de $(2+h)\sqrt{h+2}\times\frac{1}{\sqrt{-h}}$ tend donc vers $+\infty$ quand h tend vers 0 en étant négatif .

Le taux de variations en 1 n'a donc pas de limite quand h tend vers 0 donc <u>*f* n'est pas dérivable en 1</u>.

<u>Vérifications</u> : (1) Geogebra donne le taux simplifié qui est bien celui que nous avons trouvé et (2) Sur la figure fournie par la calculatrice ou Geogebra, il semble bien que la courbe admet une tangente verticale en +1. On a vu en Première que lorsque le taux de variations tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on observe une tangente verticale.

4) Déterminer les extremums de f sur son domaine de définition.

Une racine carrée étant toujours positive, $f'(x)=\frac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ est du signe de $-2x^2-x+1$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta=b^2-4ac=1-4(-2)=9=3^2$. Le trinôme a donc deux racines distinctes $x_1=\frac{1+3}{-4}=-1$ et $x_1=\frac{1-3}{-4}=\frac{1}{2}$. $-2x^2-x+1$ est un polynôme de degré deux, il est donc du signe de $a=-2>0$ à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre les racines. On en déduit que $-2x^2-x+1\geqslant 0$ ssi $x\in\left[-1\,;\frac{1}{2}\right]$.

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
signe de f '(x)	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

D'après le tableau de variations, le maximum de *f* est $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

5) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$ a pour équation $y=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$. Avec $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{9}$ et $f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$, on obtient $y=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{8\sqrt{2}}{9}$ càd $\boxed{y=\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{7\sqrt{2}}{9}}$