D.M. de mathématiques n°1 : Second degré	1ère S 1

A rendre le mardi 20 septembre 2011 au début de l'heure

Exercice 1. Avec un paramètre

On se propose de résoudre l'inéquation (I_m): $x^2+6x\leq m$ en fonction des valeurs du paramètre *m*.
Il s'agit en fait d'une famille d'inéquations puisque pour chaque valeur de m, on a une inéquation différente. Ainsi, (I_3) *est l'inéquation* $x^2+6x\leq 3$.

1) Mettre $f_m(x)=x^2+6x-m$ sous forme canonique. *L'expression attendue dépend du paramètre m.*

2) En déduire la résolution de (I_m) en fonction des valeurs du paramètre *m*.

3) Application : Résoudre (I_{-27}) , (I_{-9}) , (I_9) et (I_{27}) .

Exercice 2. Optimisation

ABCD est un rectangle tel que AD = *a* et AB = 2*a* (avec *a*> 0). Les points M, N , P et Q appartiennent respectivement aux côtés [AB], [BC], [DC] et [AD]. De plus AM = BN = PC = DQ.
Déterminer la position du point M sur [AB] qui rend l'aire du quadrilatère MNPQ minimale.

D.M. de mathématiques n°1 : Second degré	1ère S 1

A rendre le mardi 20 septembre 2011 au début de l'heure

Exercice 1. Avec un paramètre

On se propose de résoudre l'inéquation (I_m): $x^2+6x\leq m$ en fonction des valeurs du paramètre *m*.
Il s'agit en fait d'une famille d'inéquations puisque pour chaque valeur de m, on a une inéquation différente. Ainsi, (I_3) *est l'inéquation* $x^2+6x\leq 3$.

1) Mettre $f_m(x)=x^2+6x-m$ sous forme canonique. *L'expression attendue dépend du paramètre m.*

2) En déduire la résolution de (I_m) en fonction des valeurs du paramètre *m*.

3) Application : Résoudre (I_{-27}) , (I_{-9}) , (I_9) et (I_{27}) .

Exercice 2. Optimisation

ABCD est un rectangle tel que AD = *a* et AB = 2*a* (avec *a*> 0). Les points M, N , P et Q appartiennent respectivement aux côtés [AB], [BC], [DC] et [AD]. De plus AM = BN = PC = DQ.
Déterminer la position du point M sur [AB] qui rend l'aire du quadrilatère MNPQ minimale.

D.M. n°1 : Second degré - CORRIGÉ	$1^{\text{ère}}$ S 1

Exercice 1. Avec un paramètre

1) Mettre $f_m(x)=x^2+6x-m$ sous forme canonique.

$f_m(x)=x^2+6x-m=(x+3)^2-9-m$. $\boxed{f_m(x)=(x+3)^2-9-m}$

2) En déduire la résolution de (I_m) en fonction des valeurs du paramètre *m*.

Reformulons la question : (I_m): $x^2+6x\leq m \Leftrightarrow x^2+6x-m\leq 0 \Leftrightarrow f_m(x)\leq 0$. Résoudre (I_m) revient donc à résoudre $f_m(x)\leq 0$. Or $f_m(x)=(x+3)^2-(9+m)$.

<u>1er cas</u> : $9+m\geqslant 0$. Dans ce cas, $f_m(x)=(x+3)^2-\left(\sqrt{9+m}\right)^2=\left(x+3+\sqrt{9+m}\right)\left(x+3-\sqrt{9+m}\right)$
Avec un tableau de signe (laissé aux bons soins du lecteur), on obtient que $f_m(x)\leq 0$ ssi $x\in\left[-3-\sqrt{9+m}\,;\,-3+\sqrt{9+m}\right]$.

<u>2ème cas</u> : $9+m<0$. On a donc $-(9+m)>0$. Par ailleurs, $(x+3)^2\geqslant 0$ puisqu'un carré est toujours positif. En additionnant ces deux inéquations, on obtient $f_m(x)=(x+3)^2-(9+m)>0$ pour tout x .

<u>Bilan</u> : Si $m<-9$, (I_m) n'a pas de solutions, c'est à dire $S_{I_m}=\varnothing$.
Si $m=-9$, (I_m) admet une unique solution qui est $x=-3$, c'est à dire $S_{I_{-9}}=\{-3\}$.
Si $m>-9$, les solutions de (I_m) sont $S_{I_m}=\left[-3-\sqrt{9+m}\,;\,-3+\sqrt{9+m}\right]$.

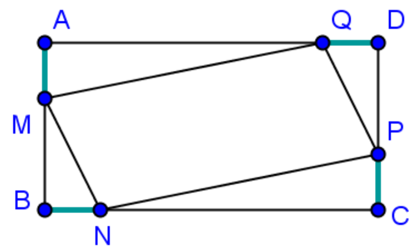
3) Application : Résoudre (I_{-27}) , (I_{-9}) , (I_9) et (I_{27}) .

Il suffit d'appliquer les résultats prouvés ci-dessus avec $m=-27$ puis $m=-9$ ….etc.

- Pour $m=-27$, comme $-27<-9$, on a $\boxed{S_{I_{-27}}=\varnothing}$.
- Pour $m=-9$, on a $\boxed{S_{I_{-9}}=\{-3\}}$.
- Pour $m=9>-9$, les solutions de (I_m) sont $\boxed{S_{I_9}=\left[-3-3\sqrt{2}\,;\,-3+3\sqrt{2}\right]}$. En effet, $\sqrt{9+m}=\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=3\sqrt{2}$.
- Pour $m=27>-9$, les solutions de (I_m) sont $\boxed{S_{I_9}=[-9\,;\,3]}$. En effet, $\sqrt{9+m}=\sqrt{36}=6$.

Exercice 2. Optimisation

ABCD est un rectangle tel que AD = *a* et AB = 2*a* (avec *a*> 0). Les points M, N , P et Q appartiennent respectivement aux côtés [AB], [BC], [DC] et [AD]. De plus AM = BN = PC = DQ. Déterminer la position du point M sur [AB] qui rend l'aire du quadrilatère MNPQ minimale.



Posons x = AM = BN = PC = DQ.
L'aire de MNPQ s'obtient en soustrayant à l'aire du rectangle ABCD celles des 4 triangles rectangles, superposables 2 à 2, soit

$$A_{MNPQ} = A_{MNPQ} - 2\times A_{AMQ} - 2\times A_{BMN}$$

$$= 2a^2 - 2\times\frac{x(2a-x)}{2} - 2\times\frac{x(a-x)}{2}$$

$$= 2a^2 - x(2a-x) - x(a-x) = 2x^2 - 3ax + 2a^2$$

$A_{MNPQ} = 2x^2 - 3ax + 2a^2$ est un trinôme du second degré en x, sa courbe représentatives est donc une parabole. Comme le coefficient de x^2 est positif, cette parabole est tournée vers le haut et son point le plus bas est donc son sommet. Ce sommet a pour abscisse $x_S = -\frac{-3a}{4} = \frac{3a}{4}$ <u>et c'est donc la valeur de x pour laquelle l'aire du quadrilatère MNPQ minimale.</u>

<u>Remarques</u> : 1) Mieux vaut dire « le coefficient de x^2 est positif » plutôt que « a>0 » car a désigne autre chose dans cet exercice.
2) MNPQ est un parallélogramme, mais à quoi bon le prouver puisque cela ne nous sert pas pour résoudre le problème ?
3) La valeur correspondante de l'aire est $\frac{7a^2}{8}$, mais comme personne ne nous l'a demandée, il est inutile de la donner.