

A rendre le vendredi 12 novembre au début de l'heure

Soit (u_n) une suite réelle (pas forcément convergente). On dit que (u_n) converge vers ℓ en moyenne si la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^n u_k \right)$ converge vers ℓ .

Remarque: v_n est la moyenne des n premiers termes de la suite (u_n) d'où le nom.

Partie I: Étude d'exemples

- 1) Si (u_n) est la suite constante égale à α , déterminer v_n et déterminer la limite de (v_n) si elle existe.
- 2) Si (u_n) est la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, déterminer v_n et déterminer la limite de (v_n) si elle existe.
- 3) Si (u_n) est la suite de terme général $u_n = n$, déterminer v_n et déterminer la limite de (v_n) si elle existe.

Partie II: Cas général

- 4) Est-ce qu'une suite (u_n) qui converge vers ℓ (au sens habituel) converge forcément en moyenne? Si oui, vers quelle limite?
- 5) Est-ce qu'une suite (u_n) qui converge en moyenne vers ℓ est forcément convergente? Si oui, vers quelle limite?

Partie III: Application

- 6) Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{n} \right) = \ell$.