D.M. n°2 : Repérage, Configurations — 2nde

A rendre le mercredi 18 septembre 2013

Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± – Technique : + ± – Raisonnement : + ± –	Note : $\frac{}{5}$

Rappel : La rédaction des DM doit être individuelle.

Exercice 1.

Soit (O, U, V) un repère orthonormé du plan. On considère les points $K(2;\sqrt{2})$, $C(1;-2)$, $I(-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$ et $E(-1-\sqrt{2};-1)$.

1) Faire un dessin (pas nécessairement) exact pour conjecturer la nature du quadrilatère KIES.

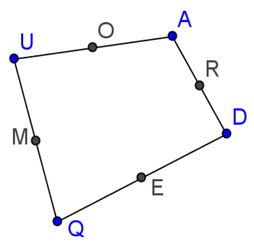
2) Calculer les distances KI, IE, EC et KC.

3) Ces distances permettent-elles de conclure sur la nature du quadrilatère KIES?

4) Deux calculs de distance permettent de conclure. Lesquels? Réaliser ces calculs et conclure.

Exercice 2. *Le quadrilatère des milieux*

Sur la figure, QUAD est un quadrilatère quelconque et M, O, R et E sont les milieux respectifs des côtés [QU], [AU], [AD] et [DQ].



On se place dans le repère (Q, D, U).

1) Donner sans justification les coordonnées des points Q, U, D, M et E.

2) On pose A(a, b). Déterminer les coordonnées des milieux de [MR] et [OE].

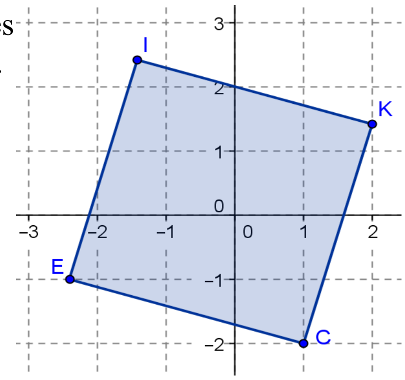
3) Énoncer le résultat démontré par cet exercice.

4) Retrouver ce résultat sans utiliser d'outils de géométrie analytique (= avec des coordonnées)

Corrigé

Exercice 1.

Soit (O, U, V) un repère orthonormé du plan. On considère les points $K(2;\sqrt{2})$, $C(1;-2)$, $I(-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$ et $E(-1-\sqrt{2};-1)$.



1) Conjecture: Le quadrilatère KIES semble être un carré.

2) Calculer les distances KI, IE, EC et KC.

- $KI=\sqrt{(2+\sqrt{2})^2+(1)^2}=\sqrt{7+4\sqrt{2}}$
- $IE=\sqrt{(1)^2+(2+\sqrt{2})^2}=\sqrt{7+4\sqrt{2}}$
- $EC=\sqrt{(2+\sqrt{2})^2+(1)^2}=\sqrt{7+4\sqrt{2}}$
- $IE=\sqrt{(1)^2+(2+\sqrt{2})^2}=\sqrt{7+4\sqrt{2}}$

3) Ces distances permettent-elles de conclure sur la nature du quadrilatère KIES?

Ces calculs de distance permettent d'affirmer que KIES est un <u>losange</u>. En effet, les calculs ci-dessus montrent qu'il a quatre côtés de même longueur.

4) Deux calculs de distance permettent de conclure. Lesquels? Réaliser ces calculs et conclure.

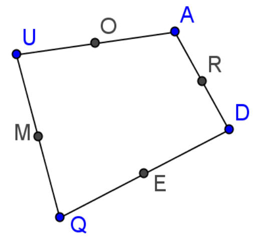
▪ $IC=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2+(3+\sqrt{2})^2}=\sqrt{14+8\sqrt{2}}$ et $KE=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2}=\sqrt{14+8\sqrt{2}}$. Les diagonales de KIES ont donc la même longueur.

▪ KIES est un losange, c'est donc un parallélogramme. Or un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur est un rectangle.

▪ KIES est à la fois un losange et un rectangle donc <u>c'est un carré</u>, ce qui confirme notre conjecture initiale.

Exercice 2. *Le quadrilatère des milieux*

Sur la figure, QUAD est un quadrilatère quelconque et M, O, R et E sont les milieux respectifs des côtés [QU], [AU], [AD] et [DQ].



On se place dans le repère (Q, D, U).

1) Donner sans justification les coordonnées des points Q, U, D, M et E.

$Q(0;0)$, $U(0;1)$, $D(1;0)$, $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et $E\left(\frac{1}{2};0\right)$.

2) On pose A(a, b). Déterminer les coordonnées des milieux de [MR] et [OE].

▪ R est le milieu de [AD], il a donc pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_D}{2};\frac{y_A+y_D}{2}\right)=\left(\frac{a+1}{2};\frac{b+0}{2}\right)$ d'où $R\left(\frac{a+1}{2};\frac{b}{2}\right)$

▪ O est le milieu de [AU], il a donc pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_U}{2};\frac{y_A+y_U}{2}\right)=\left(\frac{a+0}{2};\frac{b+1}{2}\right)$ d'où $O\left(\frac{a}{2};\frac{b+1}{2}\right)$

▪ Le milieu de [MR] a pour coordonnées $\left(\frac{x_M+x_R}{2};\frac{y_M+y_R}{2}\right)=\left(\frac{0+\frac{a+1}{2}}{2};\frac{\frac{1}{2}+\frac{b}{2}}{2}\right)=\left(\frac{a+1}{4};\frac{b+1}{4}\right)$.

▪ Le milieu de [OE] a pour coordonnées $\left(\frac{x_O+x_E}{2};\frac{y_O+y_E}{2}\right)=\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}}{2};\frac{0+\frac{b+1}{2}}{2}\right)=\left(\frac{a+1}{4};\frac{b+1}{4}\right)$.

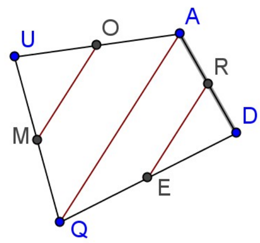
3) Énoncer le résultat démontré par cet exercice.

On constate que les milieux de [MR] et [OE] sont confondus (puisqu'ils ont les mêmes coordonnées). Les diagonales de MORE se coupent en leur milieu donc MORE est un parallélogramme.

On a prouvé que le quadrilatère ayant pour sommets les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque est toujours un parallélogramme (appelé ***parallélogramme des milieux***, d'où le titre de l'exercice).

4) Retrouver ce résultat sans utiliser d'outils de géométrie analytique (analytique= avec des coordonnées)

▪ Dans le triangle QAD, la droite (OM) joint les milieux de deux côtés du triangle.



Or, d'après le théorème de la droite des milieux, si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté et de plus, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

On déduit de ce théorème que (OM) et (AQ) sont parallèles et $OM=\frac{1}{2}AQ$.

▪ De même, en utilisant le théorème de la droite des milieux dans le triangle ADQ, on prouve que (RE) et (AQ) sont parallèles et $RE=\frac{1}{2}AQ$.

▪ Le quadrilatère MORE a donc **deux** côtés opposés **parallèles <u>et</u> de même longueur**, [OM] et [RE], c'est donc un parallélogramme.

<u>Méthode 2</u> : On aurait aussi pu faire la démonstration en prouvant que les côtés [OR] et [ME] sont parallèles et de même longueur.

<u>Méthode 3</u> : On aurait aussi pu faire la démonstration en prouvant que les côtés [OR] et [ME] sont parallèles ainsi que les côtés [OM] et [RE]. Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles **deux à deux** est un parallélogramme.