D.M. de mathématiques n°2 — *Centre d'un groupe*

TS : Préparation aux mathématiques du supérieur

A rendre le vendredi 10 décembre au début de l'heure

Soit (G, $*$) un groupe, non nécessairement commutatif. On appelle *centre du groupe G* l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres et on le note $\mathscr{C}(G)$.
Autrement dit, $\mathscr{C}(G) = \{g\in G \,/\, \forall\; g'\in G \;\; g* g'=g'* g\}$.

1) Montrer que le centre $\mathscr{C}(G)$ d'un groupe G est un sous-groupe de G.

2) Caractérisez les groupes commutatifs au moyen de leur centre.

On attend une réponse du type « Un groupe est commutatif ssi son centre .... ».

3) **Etude d'un exemple:** Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f(x)=ax+b$ avec $a\neq 0$. On a vu en cours que $(\mathscr{A},\circ)$ est un groupe, autrement dit $\mathscr{A}$ est un groupe pour la composition de fonctions. Déterminer le centre de $\mathscr{A}$.

FIN DU DM et début des exercices à faire en classe

exercice 1

Soit (G, $*$) un groupe. Montrer que : $\forall\, g, g'$ et $g''\in G,\; g* g'=g* g''\Rightarrow g'=g''$.

Autrement dit , on peut toujours « simplifier par g ».

On dit que tout élément d'un groupe est *régulier*.

exercice 2

On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ dans lui-même:

$f_1 : x\rightarrow x;\quad f_2 : x\rightarrow 1-x;\quad f_3 : x\rightarrow \dfrac{1}{1-x};\quad f_4 : x\rightarrow \dfrac{1}{x};\quad f_5 : x\rightarrow \dfrac{x}{x-1};\quad f_6 : x\rightarrow \dfrac{x-1}{x}$

1) Montrer que $G=\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ est un groupe pour la composition des applications.

2) Le groupe $(G,\circ)$ est-il commutatif?

3) Déterminer tous les sous-groupes de $(G,\circ)$.

4) **a)** Quel est le plus petit sous-groupe de $(G,\circ)$ contenant f_2 ?

b) Quel est le plus petit sous-groupe de $(G,\circ)$ contenant f_3 ?

c) Quel est le plus petit sous-groupe de $(G,\circ)$ contenant f_2 et f_3 ?