D.M. n°3 : Suites — TS 1

A rendre le lundi 5 novembre au début de l'heure

Exercice 1. Démonstration par récurrence = Proof by induction

This "proof" will attempt to show that all people in Canada are the same age, by showing by induction that the following statement (which we'll call " $S(n)$ " for short) is true for all natural numbers n :
"*In any group of n people, everyone in that group has the same age*".
The conclusion follows from that statement by letting n be the number of people in Canada.
In any group that consists of just one person, everybody in the group has the same age, because after all there is only one person ! Therefore, statement $S(1)$ is true.
Let n be a natural number such that $S(n)$ is true. Let's prove that $S(n+1)$ is true, that is to say "in any group of $n+1$ people, everyone has the same age".
Let G be an arbitrary group of $n+1$ people ; we just need to show that every member of G has the same age. To do this, we just need to show that, if m_1 and m_2 are any members of G, then they have the same age.
Consider everybody in G except m_1. These people form a group F of n people, so they must all have the same age (since we are assuming that, in any group of n people, everyone has the same age). Consider now everybody in G except m_2. Again, they form a group E of n people, so they must all have the same age.
Let m_3 be someone else in G other than m_1 or m_2. Since m_2 and m_3 each belong to the group F, they are the same age. Since m_1 and m_3 each belong to the group E, they are the same age.
Since m_2 and m_3 are the same age, and m_1 and m_3 are the same age, it follows that m_1 and m_2 are the same age.
We have now seen that, if we consider any two people m_1 and m_2 in G, they have the same age.
It follows that everyone in G has the same age.
The proof is now complete.

Question : Where does the mistake lie in this « proof » ? (and yes, you need to answer in English.)

Exercice 2.

On note u_n le nombre de foyers exprimé en millions possédant un téléviseur à écran plat l'année n. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;20]$ par $f(x)=0,1\,x(20-x)$.

On pose $n=0$ en 2005 et $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) On a tracé (feuille annexe) $\mathscr{C}$, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0;15]$.

a) Sur le graphique, placer sur l'axe des abscisses u_o, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. Faire apparaître les traits de construction.

b) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

2) Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1.b.

a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0;20]$.

b) En déduire que pour tout x de $[0;10]$, $f(x)\in[0;10]$.

c) Démontrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 10$.

d) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

e) Notons ℓ la limite de la suite (u_n), démontrer que ℓ vérifie l'égalité $0,1\,\ell(20-\ell)=\ell$.

f) En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 3.

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N

Traitement
U prend la valeur 0
Pour k allant de 0 à N-1
    U prend la valeur 3 U -2 k +3
Fin pour

Sortie
Afficher la valeur U
```

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N=3$? Indiquer les différentes étapes de la boucle pour.

Partie B

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=3u_n-2n+3 \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) a) Démontrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant n$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4) Soit p un entier naturel non nul.

a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n\geqslant n_0,\ u_n\geqslant 10^p$?

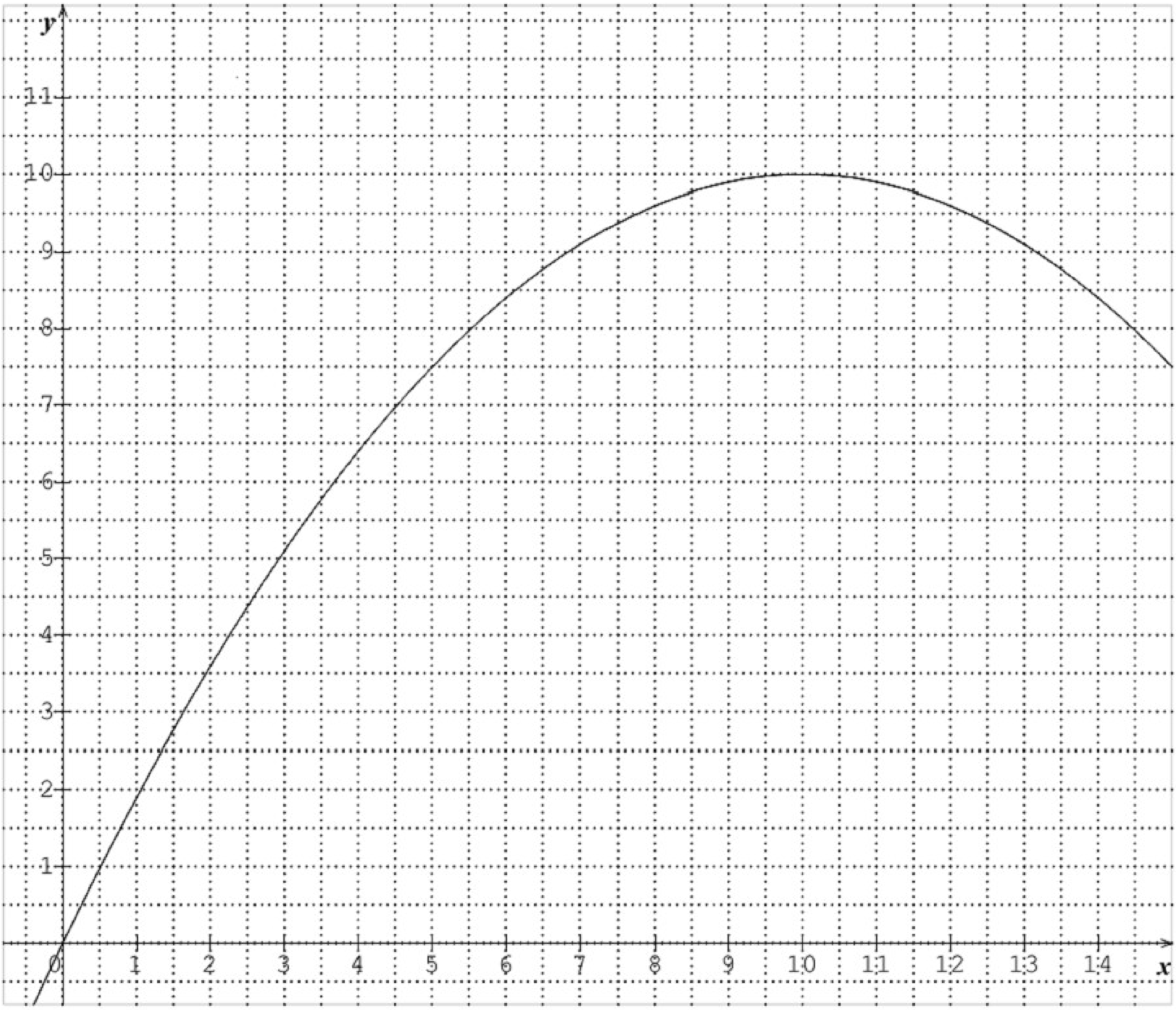
b) On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0 vérifiant cette condition. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier pour la valeur $p=3$.

c) Proposer un algorithme (sur votre copie) qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n\geqslant n_0,\ u_n\geqslant 10^p$.

d) Entrez votre algorithme sur votre calculatrice ou sur Algobox *(de préférence sur votre calculatrice : En effet, c'est un des algorithmes supposés connus le jour du BAC donc autant l'avoir toujours sur soi.)* et utilisez-le pour remplir le tableau donné en annexe.

Annexe à rendre	**DM 3 TS1**
NOM :	
Prénom :	

Exercice 2



Exercice 3

p	1	2	3	4	5	6	7
n_0							

D.M. n°3 : Suites CORRIGÉ	TS 1

Exercice 1. Exercice de Baccalauréat, Épreuve orale de DNL, Section Européenne

The proof that " $S(n)$ is true implies that $S(n+1)$ is true" uses the fact that there are at least three different people, (namely m_1, m_2 and m_3) in any set of $n+1$ people which in turn implies that $n+1 \geqslant 3$, that is $n \geqslant 2$.
Hence what has been proved is that :

- The base case: $S(1)$ is true;
- The inductive step: For all $n \geqslant 2$, $S(n)$ is true implies that $S(n+1)$ is true.

With only this, it is not possible to prove that $S(2)$ holds since <u>we cannot use the inductive step for $n=1<2$</u>.

A few comments:

(1) With the usual ladder analogy, it means (base case) that you know how to get on the first step of the ladder and (inductive step) that <u>from the second step and above</u>, you know how to get to the next step. This excludes going from the first step to the second so you cannot climb the ladder: You are stuck on the first step!

(2) For the proof to work we would need <u>either</u> :

- The base case: $S(1)$ is true;
- The inductive step: For all $n \geqslant 1$, $S(n)$ is true implies that $S(n+1)$ is true. (*)

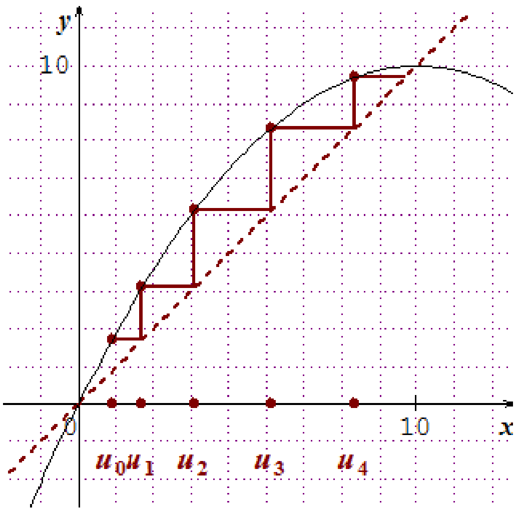
<u>or</u>

- The base case: $S(2)$ is true; (*)
- The inductive step: For all $n \geqslant 2$, $S(n)$ is true implies that $S(n+1)$ is true.

but in both cases the proof fails as the part marked with (*) does not hold.

Exercice 2.

1) a)



f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;20]$ par $f(x)=0{,}1x(20-x)$

b) La suite (u_n) semble croissante et elle semble converger vers 10.

2) a) *Variations de la fonction f sur $[0;20]$:*

Méthode 1 : f est un trinôme du second degré. Le coefficient de x^2 étant négatif, sa courbe représentative est une parabole tournée vers le bas. Les racines de f sont 0 et 20. Par symétrie, f admet donc un maximum en $x=(0+20)/2=10$.

Méthode 2 : En calculant la dérivée de f et en étudiant son signe.

Tableau de variations de f sur $[0;20]$:

x	0		10		20
signe de $f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	10	↘	0

b) $0 \leqslant x \leqslant 10 \overset{(i)}{\Rightarrow} f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(10) \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant f(x) \leqslant 10$

(i) car f est croissante sur $[0;10]$.

(ii) car $f(0)=0$ et $f(10)=10$

On a donc prouvé que $\boxed{\forall x \in [0;10], f(x) \in [0;10].}$

c) Notons P_n la proposition « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$ ».

- *Initialisation* : $u_0=1$ et $u_1=0{,}1\,u_0(20-u_0)=0{,}1\times 19=1{,}9$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10$: P_0 est vraie.
- *Hérédité* : Supposons P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant 0$ (fixé). Par hypothèse de récurrence, on sait que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$. Or f est croissante sur $[0;10]$ donc en appliquant f à cette inégalité, on en déduit que $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(10)$ càd $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$ et donc P_{n+1} est vraie. Ainsi, la proposition P_n est héréditaire.
- *Conclusion* : Par le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, càd que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10}$.

d) La suite (u_n) est croissant et majorée (voir question précédente) donc elle est <u>convergente</u>.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$. En passant à la limite dans l'équation $u_{n+1}=0{,}1\,u_n(20-u_n)$, on obtient bien $0{,}1\,\ell(20-\ell)=\ell$.

f) $0{,}1\,\ell(20-\ell)=\ell \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \ell(20-\ell)=10\,\ell = \Leftrightarrow \ell(20-\ell)-10\,\ell=0 \Leftrightarrow \ell(20-\ell-10)=0 \Leftrightarrow \ell(10-\ell)=0 \Leftrightarrow \ell=0$ ou $\ell=10$.

(i) en multipliant les deux membres par 10.

Or $u_0=1$ et (u_n) est croissante donc $\ell \geqslant 1$. Ceci élimine la possibilité $\ell=0$ donc $\boxed{\ell=10}$.

Exercice 3.

<u>Partie A</u>

1) a) Étapes lorsque $N=3$. Ce tableau indique les variables et leur valeur au cours du temps

N	U	k
3	0	0
3	[Première itération de la boucle Pour avec k=0] $3\times 0-2\times 0+3=3$	0
3	3	1
3	$3\times 3-2\times 1+3=10$	1
3	10	2
3	$3\times 10-2\times 2+3=29$ [k=N-1, la boucle s'arrête]	2

<u>Entrée</u>
Saisir le nombre entier naturel non nul N

<u>Traitement</u>
U prend la valeur 0
Pour k allant de 0 à N-1
  U prend la valeur 3 U -2 k +3
Fin pour

<u>Sortie</u>
Afficher la valeur U

Pour $N=3$, l'algorithme donne en sortie $U=29$.

<u>Partie B</u>

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=3\,u_n-2\,n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Pour $n=0,\ u_{n+1}=3u_n-2n+3$ devient $u_1=3\,u_0-2\times 0+3=3$.

Pour $n=1,\ u_{n+1}=3u_n-2n+3$ devient $u_2=3\,u_1-2\times 1+3=10$. $\boxed{u_1=3,\ u_2=10}$

Remarque : Pour $n=2,\ u_{n+1}=3\,u_n-2\,n+3$ *devient* $u_3=3\,u_2-2\times 2+3=29$.
On reconnaît les calculs faits en faisant tourner l'algorithme à la main dans la partie A.

2) a) Notons P_n la proposition « $u_n \geqslant n$ », que l'on peut aussi écrire « $u_n - n \geqslant 0$ »

- *Initialisation* : $u_0 - 0 = 0 \geqslant 0$ donc P_0 est vraie.
- *Hérédité* : Supposons P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant 0$ (fixé).
  $u_{n+1} - (n+1) = 3u_n - 2n + 3 - (n+1) = 3u_n - 3n + 2$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \geqslant n$, d'où $3u_n \geqslant 3n$ càd $3u_n - 3n \geqslant 0$, ce qui entraîne $u_{n+1} - (n+1) \geqslant 0 + 2 \geqslant 0$ donc P_{n+1} est vraie. Ainsi, la proposition P_n est héréditaire.
- *Conclusion* : Par le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, càd que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\boxed{u_n \geqslant n}$.

b) D'après ce qui précède, u_n est minoré par le terme général d'une suite qui tend vers $+\infty$ (en effet, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$) donc par le théorème de minoration $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3 \overset{(i)}{\geqslant} 0 + 3 \geqslant 0$ (i) car $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geqslant n$ d'après 2 a).

La suite (u_n) est donc croissante.

4) Soit p un entier naturel non nul.

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc par définition tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang. En appliquant cette définition avec $A = 10^p$, on obtient le résultat souhaité.

b) Un tableau de valeurs obtenu au moyen de la calculatrice donne $u_6 = 734$ et $u_7 = 2193$ donc le plus petit indice pour lequel u_n dépasse $10^3 = 1000$ est $\boxed{n_0 = 7}$.
(Et on profite du tableau de valeurs pour vérifier que $u_1 = 3$, $u_2 = 10$ et $u_3 = 29$.)

c) Ci-dessous un algorithme et ci-contre le programme corresondant sur Algobox qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_{0,}$ $u_n \geqslant 10^p$.

```
Algorithme

Saisir le nombre entier naturel non nul p
U prend la valeur 0
n prend la valeur 0
Tant que U< 10^p
   | U prend la valeur 3 U -2 k +3
   | n prend la valeur n+1
Fin Tant que
Afficher n
```

```
VARIABLES
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  U PREND_LA_VALEUR 0
  k PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (U< pow(10, p)) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    U PREND_LA_VALEUR 3*U-2*k+3
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER k
FIN_ALGORITHME
```

d) L'algorithme fournit les réponses ci-dessous, que l'on peut bien sûr vérifier avec le tableau de valeurs de la calculatrice et les valeurs déjà calculées.

p	1	2	3	4	5	6	7
n_0	2	5	7	9	11	13	15

Et si on n'a pas réussi à écrire l'algorithme, on remplit le tableau avec le tableau de valeurs de la calculatrice (et on le dit, faire semblant génère de la méfiance); c'est mieux que rien !