D.M. n°4 : Complexes et exponentielle — T.S.

Exercice 1. Une suite qui converge vers e

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-(x+1)$.

1) Étudiez les variations de f et en déduire que pour tout réel x, $1+x\leqslant\mathrm{e}^x$.

2) a) Démontrer que pour tout réel $x<1$, on a $\mathrm{e}^x\leqslant\dfrac{1}{1-x}$

On pourra écrire l'inégalité du 1) pour un réel y quelconque puis poser $y=-x$.

3) a) A l'aide de l'inégalité du 1) démontrer que pour tout entier n non nul $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leqslant\mathrm{e}$.

b) En posant $x=\dfrac{1}{n+1}$ dans l'inégalité du 2), démontrer que $\mathrm{e}\leqslant\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(on vérifiera dans ce cas on a bien l'hypothèse $x<1$).

4) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n>0$ par $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

a) Démontrer que pour tout entier $n>0$, on a $0\leqslant\mathrm{e}-u_n\leqslant\dfrac{3}{n}$.

b) En déduire que la suite (u_n) converge vers e.

D.M. n°4 : Complexes et exponentielle CORRIGÉ	T.S.

Exercice 1. Une suite qui converge vers e

Remarque: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est une forme indéterminée (du type 1^{∞}). Voilà pourquoi on se donne tant de mal pour trouver la limite !

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-(x+1)$.
$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$ donc
$f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x\geqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x\geqslant \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x\geqslant 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

f a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq 0$ càd $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, 1+x\leqslant \mathrm{e}^x \quad (1)}$

<u>Point-méthode</u> : Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout réel $x\in I$, on démarre par « soit $x\in I$ » et pour cet x donné (*mais auquel on n'attribue pas de valeur, on garde la lettre* x) on prouve la propriété est vraie. Comme notre démonstration est valable quel que soit le nombre x choisi au départ dans I, ceci prouve que la propriété est vraie pour tout x de *I*.

C'est bien ce qu'on fait dans les démonstrations par récurrence pour démontrer l'hérédité : On part d'un n fixé (*mais quelconque, on ne prend pas de valeur*) et on prouve que $P(n)\Rightarrow P(n+1)$. Comme notre démonstration est valable quel que soit le nombre n choisi au départ, ceci prouve que $\forall n\in\mathbb{N},\ P(n)\Rightarrow P(n+1)$.

C'est aussi ce qu'on fait (surtout avant de connaître les dérivées) pour prouver qu'une fonction est croissante sur un intervalle I : On démarre par « soient $a,b\in I$ avec $a<b$ » et pour ces nombres donnés (*mais auxquels on n'attribue pas de valeur, on garde les lettres* a *et* b) on prouve que $f(a)\leqslant f(b)$.

2) Soit $x<1$. [Voir point-méthode] L' inégalité du 1) est vraie pour un réel quelconque donc elle est vraie pour le réel $-x$ ce qui donne : $1-x\leqslant \mathrm{e}^{-x}$. Or $x<1$ donc $1-x>0$. Les deux membres de l'inégalité sont donc strictement positifs. En leur appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $]0,+\infty[$, on obtient $\frac{1}{1-x}\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^x$. Cette démarche étant valable pour x quelconque, on a finalement prouvé que $\boxed{\forall x<1,\ \mathrm{e}^x\leqslant\frac{1}{1-x}. \quad (2)}$

3) a) Soit n un entier non nul [Voir point-méthode]. L' inégalité du 1) est vraie pour un réel quelconque donc elle est vraie pour le réel $x=\frac{1}{n}$ ce qui donne $1-\frac{1}{n}\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$. Les deux membres de l'inégalité sont positifs. En leur appliquant la fonction $x\mapsto x^n$ qui est croissante sur $]0,+\infty[$ on obtient $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n=\mathrm{e}$. Cette démarche étant valable pour $n>0$ quelconque, on a finalement prouvé que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant \mathrm{e}. \quad (3\mathrm{a})}$

b) Soit n un entier non nul [Voir point-méthode]. $n>0\Leftrightarrow n+1>1\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}<1$. L' inégalité du 2) est vraie pour un tout réel $x<1$ donc elle est vraie pour le réel $x=\frac{1}{n+1}<1$ ce qui donne

$e^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n} = 1+\dfrac{1}{n}$. Les deux membres de l'inégalité sont positifs. En leur appliquant la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ qui est croissante sur $]0,+\infty[$ on obtient $e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Cette démarche étant valable pour $n>0$ quelconque, on a finalement prouvé que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (3b)}$

4) a) Soit n un entier non nul [Voir point-méthode]. D'après (3a) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \leqslant e$ et d'après (3b) $e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, d'où $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \leqslant e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ càd $u_n \leqslant e \leqslant u_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ càd $0 \leqslant e-u_n \leqslant \dfrac{u_n}{n}$. Or $u_n \leqslant e$ d'après (3a), d'où $0 \leqslant e-u_n \leqslant \dfrac{e}{n} \leqslant \dfrac{3}{n}$. Cette démarche étant valable pour $n>0$ quelconque, on a finalement prouvé que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant e-u_n \leqslant \dfrac{3}{n}. \quad (4a)}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant e-u_n \leqslant \dfrac{3}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} e-u_n = 0$ càd $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e}$.

Exercice 2.

78 **45** **1** Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7.$$

a. Calculer $P(-1)$.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b).$$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.
On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives :

- $z_A = -1$,
- $z_B = 2 + i\sqrt{3}$,
- $z_C = 2 - i\sqrt{3}$
- $z_D = 3$.

a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C et D.

b. Calculer les distances AB, BC et CA. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$.
En déduire la nature du triangle ADC.

Corrigé

78 **1 a.** $P(-1) = -1 - 3 - 3 + 7 = 0$.

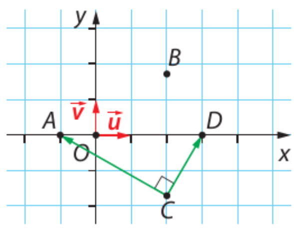
b. $P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$.

c. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z + 1 = 0$ et $z^2 - 4z + 7 = 0$.

L'équation $z^2 - 4z + 7 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -12 = (2\sqrt{3}\,i)^2$, donc deux solutions complexes conjuguées $2 + \sqrt{3}\,i$ et $2 - \sqrt{3}\,i$.

$S = \{-1 ; 2 + \sqrt{3}\,i ; 2 - \sqrt{3}\,i\}$.

2 a.



b. $AB = |2 + \sqrt{3}\,i + 1| = \sqrt{3^2 + 3} = 2\sqrt{3}$,
$BC = |-2\sqrt{3}\,i| = 2\sqrt{3}$ et $AC = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$.
ABC est donc équilatéral.

c. $\overrightarrow{CA}(-3 + i\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CD}(1 + i\sqrt{3})$.

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = -3 + 3 = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux et, par suite, le triangle ADC est rectangle en C.

Exercice 3.

74 Une suite qui converge vers e

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - (x+1).$$

1 Étudier les variations de f et en déduire que pour tout réel x, $1 + x \leqslant e^x$.

2 Démontrer que pour tout réel $x < 1$, on a : $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$

(on pourra écrire l'inégalité du **1** pour un réel y quelconque et poser $y = -x$).

3 a. À l'aide de l'inégalité du **1** démontrer que pour tout entier n non nul, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

b. En posant $x = \frac{1}{n+1}$ dans l'inégalité du **2**, démontrer que :

$$e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(on vérifiera que, dans ce cas, on a bien l'hypothèse $x < 1$).

4 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n > 0$ par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

a. Démontrer que pour tout entier $n > 0$:

$$0 \leqslant e - u_n \leqslant \frac{3}{n}.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers e.

Corrigé

74 **1** $f'(x) = e^x - 1$. La dérivée est positive si x est positif, négative si x est négatif.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, on peut dire que f est positive sur $\mathbb{R}$. Donc $e^x - (x+1) \geqslant 0$, donc $1 + x \leqslant e^x$.

2 $1 + y \leqslant e^y$, donc $1 - x \leqslant e^{-x}$, ce qui équivaut pour tout $x > 1$ à $\frac{1}{e^x} \geqslant 1 - x$, c'est-à-dire $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$.

3 a. On pose $x = \frac{1}{n}$ et d'après **1**, $1 + \frac{1}{n} \leqslant e^{\frac{1}{n}}$;

donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

b. $e^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$ (on a bien $\frac{1}{n+1} < 1$), donc on obtient $e^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{n+1}{n}$, donc $e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

4 a. On a, d'après les questions précédentes, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, c'est-à-dire :

$$u_n \leqslant e \leqslant u_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow 0 \leqslant e - u_n \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{3}{n}.$$

b. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} (e - u_n) = 0$ d'après le théorème des gendarmes. Donc la suite (u_n) converge vers e.

Pas terrible ce corrigé, à refaire....