D.M. de mathématiques n°4: *Suites arithmétiques et géométriques*	1ère S1

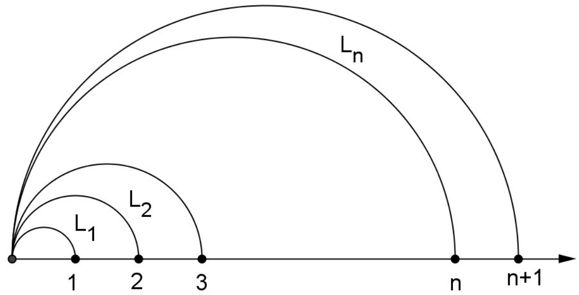
C'était le DS commun de l'an dernier.
A rendre le mercredi 7 décembre au début de l'heure

Exercice 1

Calculer la somme $S=1-2+4-8+16-32+...+1024$. *Justifier.*

Exercice 2

Pour tout entier $n\geqslant 1$, L_n est l'aire de la partie du plan comprise entre deux demi-cercles successifs sur la figure ci-contre.



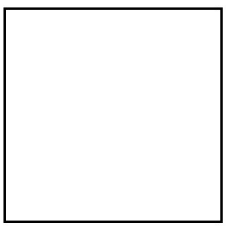
1) Montrer que la suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmétique.

2) Calculer la somme $S_n=L_1+L_2+....+L_n$.

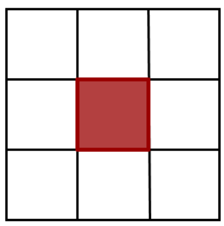
Exercice 3

On dispose d'un carré de côté 1.
Étape 1 : On partage de carré en 9 carrés égaux et on colore le carré central.
Étape 2 : Les carrés restants sont à leur tour divisés en neuf carrés et on colorie le carré central.
Et ainsi de suite.

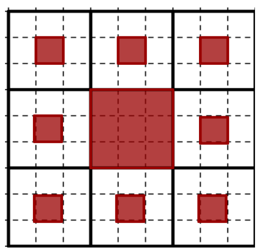
Carré initial



Étape 1



Étape 2



On note A_n l'aire coloriée à la *n*-ième étape, avec $n\geqslant 1$.

1) Déterminer A_1.

2) Justifier que $A_{n+1}=A_n+\frac{1}{9}(1-A_n)=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}A_n$.

3) On pose pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=A_n-1$.

a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis celle de A_n.

4) A la calculatrice, trouver à quelle étape 90% au moins de l'aire du carré initial est coloriée

Corrigé

Exercice 1

Calculer la somme $S=1-2+4-8+16-32+...+1024$. *Justifier.*

Les termes de cette somme sont ceux d'une suite géométrique de raison –2 et de premier terme 1.

◊ *Méthode 1* : $U_n=(-2)^n$, $U_0=1$, et le dernier terme correspond à $u_{10}=(-2)^{10}=1024$.

on a, d'après le cours (avec $q=-2$), $S=1+(-2)+(-2)^2+(-2)^2+....+(-2)^{10}=\dfrac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)}=683$.

◊ *Méthode 2* (qui ne nécessite ni de trouver l'indice du dernier terme, ni de trouver de formule explicite pour u_n):

D'après le cours, $S=\dfrac{P-(D\times q)}{1-q}=\dfrac{1-1024\times(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{2049}{3}=683$. Plus simple, non ?

PUB !

Exercice 2

1) Montrer que la suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmétique.

Souvenons-nous que … $\text{l'aire d'un disque}=\pi\times r^2$. Donc $\text{aire d'un demi-disque}=\dfrac{\pi}{2}\times r^2$.

Ainsi : $L_n=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2-\dfrac{\pi}{2}\times\left(\dfrac{n}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{8}(n^2+2n+1-n^2)=\dfrac{\pi}{8}(2n+1)$ $\boxed{L_n=\dfrac{\pi}{8}(2n+1)=\dfrac{\pi}{4}n+\dfrac{\pi}{8}}$

Montrons que cette suite est arithmétique :

◊ *Méthode 1* : $L_{n+1}-L_n=\dfrac{\pi}{8}[2(n+1)+1]-\dfrac{\pi}{2}(2n+1)=\dfrac{\pi}{8}(2n+2+1-2n-1)=\dfrac{\pi}{8}\times 2=\dfrac{\pi}{4}$ donc (L_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{\pi}{4}$. Son premier terme est $L_1=\dfrac{3\pi}{8}$.

◊ *Méthode 2* : $L_n=\dfrac{\pi}{4}n+\dfrac{\pi}{8}$ est de la forme $L_n=an+b$. Elle est donc arithmétique de raison $a=\dfrac{\pi}{4}$.

2) $S_n=L_1+L_2+....+L_n=N\times\left(\dfrac{P+D}{2}\right)=\dfrac{n}{2}\times\left(\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi}{8}(2n+1)\right)=\dfrac{n\pi}{16}\times(3+2n+1)=\dfrac{n\pi}{8}\times(n+2)=\dfrac{\pi}{8}(2n+n^2)$.

Exercice 3

On note A_n l'aire coloriée à la n-ième étape, avec $n\geqslant 1$.

1) $A_1=\dfrac{1}{9}$.

2) Exprimons A_{n+1} en fonction de A_n. Pour passer de l'aire coloriée à l'étape n à l'aire coloriée à l'étape $n+1$, on ajoute à l'aire A_n déjà coloriée $\dfrac{1}{9}$ de l'aire qui n'était pas coloriée à l'étape n, c'est à dire $\dfrac{1}{9}$ de $(1-A_n)=\dfrac{1}{9}(1-A_n)$ puisque l'aire NON coloriée à l'étape n est $1-A_n$.

On a donc $A_{n+1}=A_n+\dfrac{1}{9}(1-A_n)=A_n+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{9}A_n=\dfrac{1}{9}+\dfrac{8}{9}A_n$.

3) On pose pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=A_n-1$.

a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{A_{n+1}-1}{A_n-1}=\frac{\frac{1}{9}+\frac{8}{9}A_n-1}{A_n-1}=\frac{\frac{8}{9}A_n-\frac{8}{9}}{A_n-1}=\frac{\frac{8}{9}(A_n-1)}{A_n-1}=\frac{8}{9}$$

$u_{n+1}=A_{n+1}-1=\dfrac{1}{9}+\dfrac{8}{9}A_n-1=\dfrac{8}{9}A_n-\dfrac{8}{9}=\dfrac{8}{9}(A_n-1)=\dfrac{8}{9}u_n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q=\dfrac{8}{9}$. Son premier terme est $u_1=\dfrac{1}{9}-1=-\dfrac{8}{9}$.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis celle de A_n.

Par définition, $u_n=-\dfrac{8}{9}\times\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}$. ☞ *Attention, le premier terme étant u_1, l'exposant est $n-1$!*

Autrement dit, $u_n=-\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$. De plus, comme $u_n=A_n-1$, on a $A_n=u_n+1$ et donc $A_n=-\left(\dfrac{8}{9}\right)^n+1$.

4) A la calculatrice, trouver à quelle étape 90% au moins de l'aire du carré initial est coloriée.

Dans un tableau de valeurs de A_n fait à la calculatrice, on voit que $A_{19}\approx 0{,}893$ et $A_{20}\approx 0{,}905$. La suite dépasse donc 0,9 à partir de la vingtième étape.