D.M. n°4 : Suites	TS1

A rendre le lundi 4 novembre 2013

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Note : $\frac{}{5}$

Rappel : La rédaction des DM doit être individuelle.

Exercice 1. 34 p 32

Pour tout entier n, on considère la propriété $P_n : « 2^n \geqslant (n+1)^2 »$

1) Montrer que la propriété P_n est héréditaire à partir du rang 2.

2) Pour quelles valeurs de n la propriété est-elle vraie?

Exercice 2. 37 p 33

Soit v la suite définie sur ℕ par $v_0 = 0$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = 2v_n + 1$.

1) Représenter graphiquement dans un repère orthonormé les droites $\mathscr{D}$ et Δ d'équations respectives $y = 2x+1$ et $y = x$. Puis construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite. Conjecturer le sens de variations de la suite v.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier n, $v_n \geqslant 0$.

3) En déduire que la suite v est croissante.

Exercice 3. 94 p 78

Soit l'équation (E) $x^3 - 5x = 3$.

1) Démontrez que l'équation (E) admet une unique solution dans $[-1;0]$.

2) On souhaite donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution. Après avoir analysé l'algorithme ci-dessous, compléter les pointillés de façon à résoudre le problème.

3) L'équation (E) admet-elle des solutions n'appartenant pas à $[-1;0]$? Justifier.

Si oui, pour chaque solution, modifier l'algorithme précédent de façon à en obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

```
Variables :
    x , y : réels
Début :
    x ← −1 ; y ← x³ − 5x ;
   TantQue y > 3 Faire
        x ← …
        y ← …
   FinTantQue
   Afficher (x − 0,01 ; x)
Fin
```

Corrigé

Exercice 1.

Pour tout entier n, on considère la propriété $P_n : « 2^n \geqslant (n+1)^2 »$

1) Montrer que la propriété P_n est héréditaire à partir du rang 2.

Soit $n \geqslant 2$ tel que P_n est vraie. Prouvons que P_{n+1} est vraie, càd que $2^{n+1} \geqslant (n+2)^2$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $2^n \geqslant (n+1)^2$.

Or $2^n \geqslant (n+1)^2 \overset{(i)}{\Rightarrow} 2^n \times 2 \geqslant (n+1)^2 \times 2 \overset{(ii)}{\Rightarrow} 2^{n+1} \geqslant 2n^2 + 4n + 2$

(i) en multipliant les deux membres par 2;
(ii) en développant le membre de droite.

Il suffit alors de prouver que $2n^2 + 4n + 2 \geqslant (n+2)^2$ pour conclure :

$2n^2 + 4n + 2 \geqslant (n+2)^2 \Leftrightarrow 2n^2 + 4n + 2 \geqslant n^2 + 4n + 4 \Leftrightarrow n^2 \geqslant 2$ ce qui est vrai puisque $n \geqslant 2$ donc $n^2 \geqslant 4$. .

On a donc $2^{n+1} \geqslant 2n^2 + 4n + 2 \geqslant (n+2)^2$ donc P_{n+1} est vraie.

2) Pour quelles valeurs de n la propriété est-elle vraie ?

La calculatrice fournit rapidement le tableau de valeurs suivant:

n	0	1	2	3	4	5	6
2^n	1	2	4	8	16	32	64
$(n+1)^2$	1	4	9	16	25	36	49
P_n vraie?	V	F	F	F	F	F	V

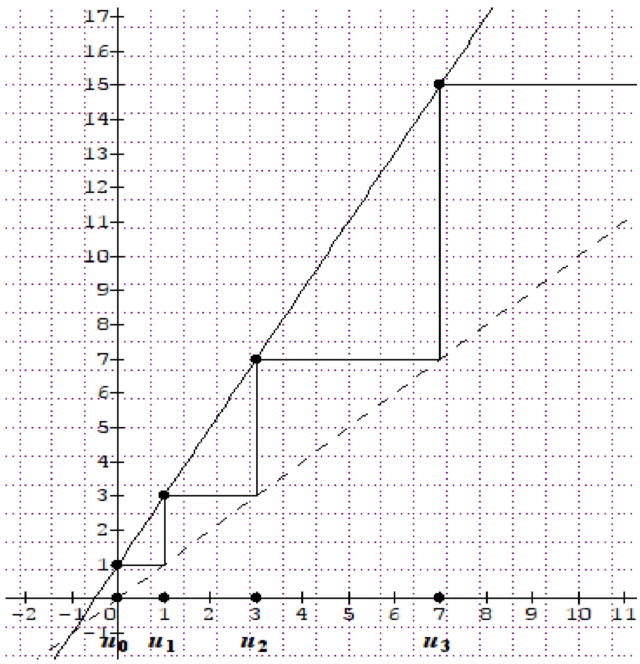
Puisque P_6 est vraie et que la la propriété P_n est héréditaire à partir du rang 2 donc a fortiori pour des rangs supérieurs ou égaux à 6, P_n sera vraie pour tout entier $n \geqslant 6$.

Finalement, P_n est vraie pour $n=0$ et pour tout entier $n \geqslant 6$.

Exercice 2.

Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0=0$ et pour tout entier n, $v_{n+1}=2v_n+1$.

1) Représenter graphiquement dans un repère orthonormé les droites $\mathscr{D}$ et Δ d'équations respectives $y=2x+1$ et $y=x$. Puis construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite. Conjecturer le sens de variations de la suite v.



<u>Conjecture</u> : La suite v est croissante.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier n, $v_n \geqslant 0$.

Soit f la fonction définie par $f(x)=2x+1$.

On a $v_{n+1}=f(v_n)$

Notons P_n la proposition « $v_n \geqslant 0$ ».

- *Initialisation* : $v_0=0 \geq 0$: P_0 est vraie.
- *Hérédité* : Supposons P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant 0$ (fixé). Par hypothèse de récurrence, on sait que $v_n \geqslant 0$. Or f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc en appliquant f à cette inégalité, on en déduit que $f(v_n) \geqslant f(0)$. Or $f(0)=1 \geqslant 0$ donc $v_{n+1}=f(v_n) \geqslant f(0)=1 \geqslant 0$ et donc P_{n+1} est vraie. Ainsi, la proposition P_n est héréditaire.
- *Conclusion* : Par le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, càd que pour tout entier $n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 0$.

3) En déduire que la suite v est croissante.

$v_{n+1}-v_n=v_n+1$. Or pour tout entier $n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 0$ donc $v_n+1 \geqslant 0$ comme somme de deux entiers positifs.
Finalement, pour tout entier $n \geqslant 0$, $v_{n+1}-v_n \geqslant 0$ donc <u>la suite v est croissante</u>.

Exercice 3.

Soit l'équation (E) $x^3-5x=3$.

1) Démontrez que l'équation (E) admet une unique solution dans $[-1;0]$.

■ *On commence par reformuler la question au moyen d'une fonction*: Soit f la fonction dé finie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-5x$. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $[-1;0]$ est équivalent à montrer que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution dans $[-1;0]$.

<u>Remarque</u>: On peut aussi choisir la fonction $g(x)=x^3-5x-3$ et reformuler en fonction de g : Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $[-1;0]$ est équivalent à montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $[-1;0]$.

■ *Méthode : On veut appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur $[-1;0]$ et pour cela on commence par faire l'étude des variations de f.*

f est un polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x)=3x^2-5$.

Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	α	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$	β	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	γ	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3 ↗	$\frac{10\sqrt{15}}{9}\approx 4{,}3$ ↘	3 ↘	$-\frac{10\sqrt{15}}{9}\approx -4{,}3$ ↗	3 ↗	$+\infty$

f' est un polynôme du second degré donc $f'(x)=3x^2-5$ est du signe du coefficient de x^2 (càd $3>0$) à l'extérieur de ses racines.

D'après le tableau de variations, l'équation $f(x)=3$ a trois solutions, ce que l'on rédige proprement par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (voir plus loin).

- f est continue et strictement croissante sur $[-1;0]$
- $f(-1)=4>3$
- $f(0)=0<3$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution dans $[-1;0]$.

2) On souhaite donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution. Après avoir analysé l'algorithme ci-contre, compléter les pointillés de façon à résoudre le problème.

Idée: C'est un algorithme dit *de balayage*. On part de $x=-1$ avec $y=f(-1)>3$. A chaque étape, on augmente x du pas choisi (0,01 ici) et on regarde si l'ordonnée y du point de la courbe correspondant est devenue inférieure à 3. Comme la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle, à chaque itération $y=f(x)$ diminue. On s'arrête la première fois que l'on trouve une ordonnée inférieure ou égale à 3.

Quand l'algorithme s'arrête, le nombre y qui est l'ordonnée correspondant à la valeur stockée dans x est inférieure ou égale à 3 (c'est pour cela que l'algorithme s'est arrêté) et pour la valeur précédente qui est $x-0{,}01$ l'ordonnée est strictement supérieure à 3 (sinon l'algorithme se serait arrêté avant).

```
Variables :
    x, y : réels
Début :
    x ← −1 ; y ← x³ − 5x ;
    TantQue  y>3  Faire
        x ← x+0,01
        y ← x³ − 5x
    FinTantQue
    Afficher (x−0,01 ; x)
Fin
```

On en déduit que l'intervalle $[x-0{,}01;x]$ contient la solution cherchée. De plus, il a pour amplitude 0,01 comme on le souhaitait.

3) L'équation (E) admet-elle des solutions n'appartenant pas à $[-1;0]$? Justifier.
Si oui, pour chaque solution, modifier l'algorithme précédent de façon à en obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

On découpe l'ensemble de définition en intervalles contenant soit aucune solution soit une unique solution et dans ce cas on le prouve en utilisant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

■ Sur $]-\infty;-2]$, f est croissante et majorée par f(-2)=2<3 donc pour tout x de cet intervalle f(x)<3 donc l'équation $f(x)=3$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

■ Sur $\left]-2;-\sqrt{\frac{5}{3}}\right]$, f est continue et strictement croissante avec $f(-2)=2<3$ et $f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\approx 4{,}3>3$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=3$ a une unique solution sur cet intervalle. On détermine cette solution par l'algorithme ci-contre.

Idée du balayage : Au départ $x=-2$ et $y=f(-2)<3$. On fait augmenter x de 0.01 à chaque fois et on s'arrête dès que y dépasse 3 pour la première fois (f est croissante sur cet intervalle donc y augmente à chaque étape)

```
Variables :
    x, y : réels
Début :
    x ← −2 ;
y ← x³ − 5x ;
    TantQue  y<3  Faire
        x ← x+0,01
        y ← x³ − 5x
    FinTantQue
    Afficher (x−0,01 ; x)
Fin
```

■ Sur $\left]-\sqrt{\frac{5}{3}};\sqrt{\frac{5}{3}}\right]$, f est continue et strictement décroissante avec $f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\approx 4{,}3>3$ et $f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\approx -4{,}3<3$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=3$ a une unique solution sur cet intervalle. On détermine cette solution par l'algorithme ci-contre. (C'est la solution de $[0;1]$ trouvée a la question 2)).

Idée du balayage : Au départ $x=-\sqrt{\frac{5}{3}}$ et $y=f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)>3$. On fait augmenter x de 0.01 à chaque fois et on s'arrête dès que y devient inférieur à 3 pour la première fois (f est décroissante sur cet intervalle donc y diminue à chaque étape)

Variables :
x, y : réels
Début :
$x\leftarrow -\sqrt{\frac{5}{3}}$; $y\leftarrow x^3-5x$;
TantQue $\boldsymbol{y>3}$ Faire
$\boxed{\boldsymbol{x\leftarrow x+0{,}01}}$
$\boxed{\boldsymbol{y\leftarrow x^3-5x}}$
FinTantQue
Afficher $(x-0{,}01 ; x)$
Fin

■ Sur $\left[\sqrt{\frac{5}{3}};3\right]$, f est continue et strictement croissante avec $f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\approx -4{,}3<3$ et $f(3)=12>3$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=3$ a une unique solution sur cet intervalle. On détermine cette solution par l'algorithme ci-contre.

Idée du balayage : Au départ $x=\sqrt{\frac{5}{3}}$ et $y=f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)<3$. On fait augmenter x de 0.01 à chaque fois et on s'arrête dès que y dépasse 3 pour la première fois (f est croissante sur cet intervalle donc y augmente à chaque étape)

Variables :
x, y : réels
Début :
$x\leftarrow \sqrt{\frac{5}{3}}$;
$y\leftarrow x^3-5x$;
TantQue $\boldsymbol{y<3}$ Faire
$\boxed{\boldsymbol{x\leftarrow x+0{,}01}}$
$\boxed{\boldsymbol{y\leftarrow x^3-5x}}$
FinTantQue
Afficher $(x-0{,}01 ; x)$
Fin

■ Sur $[3;\infty[$, f est croissante et minorée par $f(3)=12>3$ donc pour tout x de cet intervalle $f(x)>3$ donc l'équation $f(x)=3$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

<u>Remarque</u> (pour mes élèves, quand vous relirez ce corrigé en faisant vos révisions de bac, et pour ceux des autres, qui ne font pas forcément le programme dans le même ordre que nous) :
À ce stade de l'année, nous n'avons pas encore vu les limites de fonctions. Quand ce sera le cas, nous pourrons utiliser la généralisation du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour regrouper les deux premiers intervalles en un seul et les deux derniers en un seul. Pour les deux premiers, cela donne :

■ Sur $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{5}{3}}\right]$, f est continue et strictement croissante avec $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<3$ et $f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\approx 4{,}3>3$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=3$ a une unique solution sur cet intervalle. On détermine cette solution par l'algorithme ci-contre.

Idée du balayage : Au départ $x=-2$ et $y=f(-2)<3$. On fait augmenter x de 0.01 à chaque fois et on s'arrête dès que y dépasse 3 pour la première fois (f est croissante sur cet intervalle donc y augmente à chaque étape).

Variables :
x, y : réels
Début :
$x\leftarrow -2$; $y\leftarrow x^3-5x$;
TantQue $\boldsymbol{y<3}$ Faire
$\boxed{\boldsymbol{x\leftarrow x+0{,}01}}$
$\boxed{\boldsymbol{y\leftarrow x^3-5x}}$
FinTantQue
Afficher $(x-0{,}01 ; x)$
Fin