D.M. n°5 : Géométrie dans l'espace	205

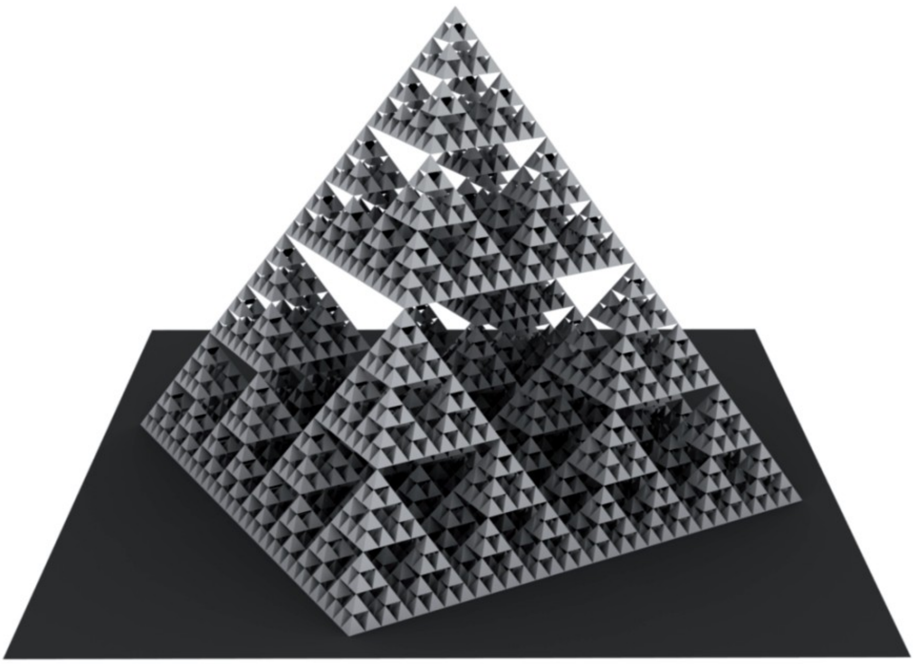
A rendre le lundi 6 janvier 2014 ; 1 seul exercice ; Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± – Technique : + ± – Raisonnement : + ± –	Note : $\frac{}{5}$

Rappel : La rédaction des DM doit être individuelle.

Exercice 1.

Cet objet inspiré de la pyramide de SIERPINSKI est un solide fractal qui s'obtient progressivement en évidant une pyramide régulière à base carrée choisie au départ. La hauteur de la la pyramide initiale n'a pas d'importance ; nous ne la fixerons donc qu'à la question qui demande un dessin en perspective cavalière afin que tout le monde ait le même dessin (je corrigerai au calque).



Voici les cinq premières étapes (voir la présentation à télécharger sur http://mathematoques.weebly.com *)*

S0 S1 S2 S3 S4

<u>Procédé de construction</u> : On remplace la pyramide à base carrée choisie au départ par cinq pyramides plus petites empilées. Les cinq petites pyramides ainsi obtenues doivent être identiques. On fait alors subir aux petites pyramides restantes la même opération d'évidement[1] que celle subie par la grande pyramide et on répète ce procédé à chaque étape.

On note S_0 le solide initial (= la pyramide pleine, voir figure ci-dessus) et V_0 son volume ; On note S_1 le solide obtenu après une opération d'évidement (voir figure ci-dessus) et V_1 son volume ; On note S_2 le solide obtenu après deux opérations d'évidement et V_2 son volume ...etc. On note donc S_n le solide obtenu après n opérations d'évidement et V_n son volume.

Partie 1 : Volume du solide à l'étape 1

Dans cette première partie, on s'intéresse uniquement au solide S_1 *obtenu à l'étape 1, après une seule opération de perçage, voir figure ci-dessus.*

1) Le solide S_1 se compose de 5 petites pyramides. Exprimer le volume v_1 d'une de ces petites

[1] *Évidement = fait d'évider, d'enlever de la matière à quelque chose.*

pyramides en fonction du volume V_0 de la pyramide initiale. *(petit « v »pour le volume des petites pyramides et grand « V » pour celui des (grands) solides formés à chaque étape.)*

2) Exprimer en fonction de V_0 le volume V_1 du solide S_1. Quelle fraction du volume de la pyramide reste-t-il après la première opération d'évidement ?

3) Grâce à vos réponses aux deux questions précédentes, compléter la première colonne le tableau ci-dessous.

4) Dessiner en perspective cavalière (on prendra $\alpha = 30°$; $k = 0{,}8$) le solide S_1 obtenu après la première opération d'évidement. On prendra comme point de départ une pyramide dont la base est un carré de 12 cm de côté et dont les autres faces sont des triangles équilatéraux. On commencera par claculer la hauteur d'une telle pyramide. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au millimètre près.

Partie 2 : Volume du solide à l'étape 2, 3 et plus.

n est un entier positif.

5) De combien de petites pyramides se compose le solide à la deuxième étape? à la troisième étape? à la n-ième étape? *(on ne compte que les petites pyramides pleines). Donner les résultats avec une puissance et les reporter dans la ligne correspondante du tableau ci-dessous..*

6) Exprimer le volume de chacune de ces petites pyramides en fonction du volume V_0 de la pyramide de départ à la deuxième étape, à la troisième étape et à la n-ième étape. *Donner les résultats avec une puissance et les reporter dans la ligne correspondante du tableau ci-dessous.*

7) Remplir sans justification la dernière ligne du tableau. Il s'agit d'exprimer le volume du solide obtenu après plusieurs opérations d'évidement en fonction du volume V_0 de la pyramide initiale. *Donner les résultats avec une puissance et les reporter dans la ligne correspondante du tableau ci-dessous.*

Nombre d'opérations d'évidement	0	1	2	3	...	n
Nombre de petites pyramides pleines	1	5				
Volume d'UNE petite pyramide pleine exprimé en fonction de V_0	V_0					
Volume du solide, exprimé en fonction de V_0	V_0					

Partie 3 : un peu d'algorithmique.

8) Que permet de faire l'algorithme ci-contre ?

9) Programmer cet algorithme en utilisant le logiciel "Algobox". Vous reporterez sur votre copie les résultats obtenus pour $N=5$; $N=10$; $N=20$; $N=100$ et $N=1000$.

10) A votre avis, que devient le volume du solide lorsque l'on réalise un très grand nombre d'étapes ? *(augmente-t-il ? diminue-t-il ? Se rapproche-t-il d'une valeur limite?)*

```
Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N
Traitement
V prend la valeur V0
Pour k allant de 1 à N
  | V prend la valeur V*5/8
Fin pour
Sortie
Afficher V
```

Le coin des curieux : Ce solide fait partie de la famille des fractales découvertes par Benoît Mandelbrot en 1974. Une fractale désigne des objets dont la structure est invariante par changement d'échelle : Autrement dit, on a beau zoomer, on voit toujours la même chose. Voyez vous mêmes : http://www.youtube.com/watch?v=P5EkdJRtF-4.
Le notre ressemble plutôt à cela : http://www.youtube.com/watch?v=4pR04V_0Ufc
Les fractales ont de nombreuses applications quotidiennes par exemple pour les murs anti-bruit. Le principe est simple : lorsqu'une onde sonore atteint une paroi, elle se réfléchit, à la manière d'un rayon lumineux sur un miroir. À chaque réflexion, elle perd une partie de son énergie. Si cette surface est poreuse, l'onde peut s'engouffrer au cœur du matériau et subir, au sein d'une des innombrables petites cavités, plusieurs réflexions successives ... et une sérieuse atténuation!
Ces objets mathématiques sont également très utilisés dans la conception d'images de synthèses (jeux vidéos et films notamment).