D.M. n°5 : Limites, exponentielle — TS

A rendre le lundi 6 janvier 2014

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Note : $\overline{\;}$ 5

Rappel : La rédaction des DM doit être individuelle.

Exercice 1. 71 p 143

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$.

1) Démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$.

En déduire la limite de la fonction f en 0.

2) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $u_n=\dfrac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$

1) Démontrer que $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

2) En déduire que $u_n=(1-e)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$

3) Calculer la limite de la suite (u_n).

Corrigé

71 Partie A

1 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-e^0}{h}=\exp'(0)=1$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}-1}=0$.

Partie B

1 La somme proposée est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 de raison $e^{\frac{1}{n}}$.

Donc :

$$\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right]=\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}.$$

2 $u_n=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}=(1-e)\dfrac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

$=(e-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3 $\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e-1$.

Exercice 2. 60 p 140

60 **Partie 1**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1 Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2 Étudier les variations de la fonction g.

3 Donner le tableau de variations de la fonction g.

4 **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
c. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

5 Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1 Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie 1**.

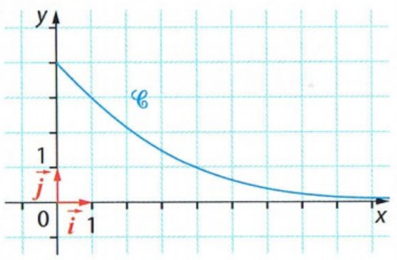
2 En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La figure est donnée ci-dessous.



Pour tout réel x positif ou nul, on note : M le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(x\,;f(x))$; P le point de coordonnées $(x\,;0)$; Q le point de coordonnées $(0\,;f(x))$.

1 Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

2 Le point M a pour abscisse α. La tangente (τ) en M à la courbe $\mathscr{C}$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Corrigé

60 **Partie 1**

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x(1 - x + \mathrm{e}^{-x}) = -\infty$.

2 $g'(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) = -x\mathrm{e}^x$, donc la dérivée est positive si x est négatif et négative si x est positif.

3

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4 **a.** La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$; de plus, $g(0) = 2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, donc il existe un réel unique α appartenant à $[0\,;+\infty[$, tel que $g(\alpha) = 0$.
b. Avec la calculatrice, on trouve $1{,}27 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}28$.
c. On a $g(\alpha) = 0$, donc $\mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0$, donc :

$$\mathrm{e}^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

5 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$ et g est croissante sur $]-\infty\,;0]$, donc g est strictement positive sur cet intervalle.
Finalement, si $x \in\,]-\infty\,;\alpha]$, $g(x) \geqslant 0$ et si $x \in [\alpha\,;+\infty[$, $g(x) \leqslant 0$.

Partie 2

1 $A'(x) = \dfrac{4(\mathrm{e}^x + 1) - 4x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \dfrac{4g(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$.

ce qui est bien du signe de $g(x)$.

2

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	$\nearrow$	$4(\alpha - 1)$	$\searrow$	

$$A(\alpha) = \frac{4\alpha}{\mathrm{e}^\alpha + 1} = \frac{4\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha - 1}} = 4(\alpha - 1).$$

Partie 3

1 L'aire du rectangle est égale à :

$$x \times f(x) = \frac{4x}{\mathrm{e}^x + 1} = A(x).$$

Cette aire est maximale lorsque A atteint son maximum, c'est-à-dire en α.
Cette aire vaut $4(\alpha - 1)$.

2 Tangente à la courbe de f en M :

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha).$$

$$f'(x) = \frac{-4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2},$$

donc $y = \dfrac{-4\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha + 1)^2}(x - \alpha) + \dfrac{4}{(\mathrm{e}^\alpha + 1)}$.

Cette tangente a pour coefficient directeur :

$$\frac{-4\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha + 1)^2} = \frac{-\dfrac{4}{\alpha - 1}}{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^2} = \frac{-4(\alpha - 1)}{\alpha^2}.$$

La droite (PQ) a pour coefficient directeur :

$$m = \frac{f(\alpha)}{-\alpha} = \frac{-4}{\alpha(\mathrm{e}^\alpha + 1)} = \frac{-4(\alpha - 1)}{\alpha^2}.$$

Ces deux droites ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.