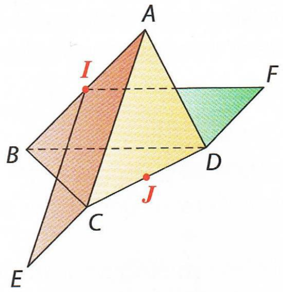
D.M. n°5 : Vecteurs de l'espace — T.S.

Exercice 1. Ex 92 p 283

92 $ABCD$ est un tétraèdre.
I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.
Les points E et F sont tels que les quadrilatères $IACE$ et $IBDF$ sont des parallélogrammes.

Le but est de démontrer de deux façons différentes que le point J est le milieu du segment $[EF]$.



1 Première méthode

On considère le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.

a. Déterminer les coordonnées des points I, J, E et F.

b. Conclure.

2 Seconde méthode

a. En utilisant la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{JF}$.

b. Conclure.

Corrigé

92 **1 a.** ▸ I est le milieu du segment $[AB]$. Donc $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$.

▸ J est le milieu du segment $[CD]$. Donc $J\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

▸ $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AI}$. Donc $\begin{cases} x_E - 1 = 0 \\ y_E = 0 \\ z_E = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Donc $E\left(1\,;0\,;-\frac{1}{2}\right)$.

▸ $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BI}$. Donc $\begin{cases} x_F = 0 \\ y_F - 1 = 0 \\ z_F = \frac{1}{2} \end{cases}$. Donc $F\left(0\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$.

b. Le milieu du segment $[EF]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2}\,;\frac{0+1}{2}\,;\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2}\right)$, soit $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$. C'est donc le point J.

Ainsi, J est le milieu du segment $[EF]$.

2 a. En utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

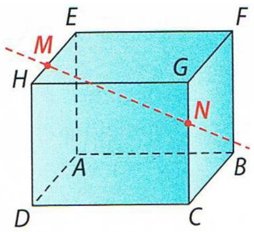
Et $\overrightarrow{JF} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ainsi, $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{JF}$.

b. On en déduit que le point J est le milieu du segment $[EF]$.

Exercice 2. Ex 93 p 284

93 **30** $ABCDEFGH$ est un pavé droit.
Pour tout réel t, on définit les points M et N par :
$\overrightarrow{HM} = t\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GN} = t\overrightarrow{GC}$.



Le but de l'exercice est d'étudier la position relative de la droite (MN) et du plan (CEF).

1 Justifier que le problème revient à étudier la coplanarité éventuelle des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$.

Dans la suite, on munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.

2 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$.

3 Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils coplanaires ?

4 Conclure.

Corrigé

93 **1** La droite (MN) et le plan (CEF) sont :
– soit parallèles, dans le cas où les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires ;
– soit sécants en un point, dans le cas contraire.
La position relative de la droite (MN) et le plan (CEF) revient donc à étudier la coplanarité éventuelle des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$.

2 Comme $\overrightarrow{HM} = t\overrightarrow{HE}$, on a : $M(1-t\,;0\,;1)$.
Comme $\overrightarrow{GN} = t\overrightarrow{GC}$, on a : $N(1;1;1-t)$.

Ainsi, $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3 On résout : $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{CF} + b\overrightarrow{EF}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = t \\ b = 1 \\ a = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -t \\ b = 1 \end{cases}$.

Donc $\overrightarrow{MN} = -t\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EF}$.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires.

4 D'après la question **3**, le droite (MN) est parallèle au plan (CEF).

Remarque : Dans les exercices, la définition des coordonnées permet souvent de trouver rapidement les coordonnées d'un point ou d'un vecteur surtout s'ils sont définis pas une relation vectorielle. Par exemple

$\overrightarrow{\mathbf{A}M}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow$ M a pour coordonnées $(x;y;z)$ dans le repère $(\mathbf{A};\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(x;y;z)$ dans la base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$

C'était le cas ici : Par exemple, dans l'exercice 93, on ne vous demande pas les coordonnées de M et N mais celles de $\overrightarrow{MN}$, qu'on obtient rapidement par cette méthode.

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GH}=-t\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(t;1\;;-t)$ dans la base $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})$ (Attention à l'ordre des vecteurs de la base!)

Beaucoup d'élèves parmi vous ont employé cette méthode et ont donc une solution à cet exercice plus rapide et élégante que le corrigé du livre !