D.M. N°6 : Intégrales – Vecteurs de l'espace | TS

A rendre le lundi 6 janvier 2014

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Note : $\frac{\quad}{5}$

Rappel : La rédaction des DM doit être individuelle.

Exercice 1. *Suites définies par une intégrale*

1) Prouver que pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) Au moyen de la méthode des rectangles, en déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$.

3) Soit (S_n) la suite définie par $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left[3\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{k}{n}\right) + 2\right]$ càd

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\left[3\left(\frac{0}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{0}{n}\right) + 2\right] + \frac{1}{n}\left[3\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{n}\right) + 2\right] + \frac{1}{n}\left[3\left(\frac{2}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{2}{n}\right) + 2\right] + \ldots + \frac{1}{n}\left[3\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{n-1}{n}\right) + 2\right].$$

a) Écrire un algorithme permettant de calculer S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur.
b) Que peut-on prévoir pour les valeurs fournies par cet algorithme lorsque n devient très grand ?

Corrigé

1) On prouve la propriété par récurrence.

Notons P_n la proposition « $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

- *Initialisation* : Pour n =1, on a $\sum_{k=1}^{1} k^2=1^2=1$. Par ailleurs, en remplaçant n par 1 dans le membre de droite, on a $\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}=1$: Ces quantités sont égales donc P_1 est vraie.
- *Hérédité* : Supposons P_n vraie pour un certain entier $n\geqslant 1$ (fixé). $\sum_{k=1}^{n+1} k^2=\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)+(n+1)^2$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=(n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right]=(n+1)\left[\frac{2n^2+7n+6}{6}\right]=(n+1)\left[\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right]$$
et donc P_{n+1} est vraie. Ainsi, la proposition P_n est héréditaire.
- *Conclusion* : Par le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier $n\geqslant 1$.

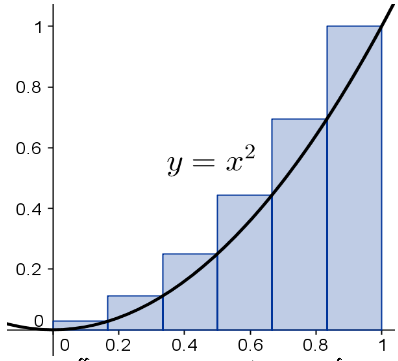


Illustration avec n= 6 rectangles

2) On approxime l'aire $I=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ au moyen de n rectangles de dimension $\frac{1}{n}$ sur $f\left(\frac{k}{n}\right)=\left(\frac{k}{n}\right)^2$, lorsque k varie entre 1 et n.

La somme des aires de ces rectangles est

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\overset{(i)}{=}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\overset{(ii)}{=}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$$

(i) d'après la question 1.
(ii) en divisant le numérateur et le dénominateur par n^3.

L'aire cherchée est $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. $\boxed{I=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}}$

3) a) Écrire un algorithme permettant de calculer S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur.

$$S_n=\underbrace{\frac{1}{n}\left[3\left(\frac{0}{n}\right)^2-5\left(\frac{0}{n}\right)+2\right]}_{k=0}+\underbrace{\frac{1}{n}\left[3\left(\frac{1}{n}\right)^2-5\left(\frac{1}{n}\right)+2\right]}_{k=1}$$
$$+\underbrace{\frac{1}{n}\left[3\left(\frac{2}{n}\right)^2-5\left(\frac{2}{n}\right)+2\right]}_{k=2}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n}\left[3\left(\frac{n-1}{n}\right)^2-5\left(\frac{n-1}{n}\right)+2\right]}_{k=n-1}$$

<u>Entrée</u>
Saisir un nombre entier naturel non nul n

<u>Traitement</u>
S prend la valeur 0
POUR k allant de 0 à n-1
    S prend la valeur $S+\frac{1}{n}\left[3\left(\frac{k}{n}\right)^2-5\left(\frac{k}{n}\right)+2\right]$
FIN POUR

<u>Sortie</u>
Afficher S

b) $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left[3\left(\frac{k}{n}\right)^2-5\left(\frac{k}{n}\right)+2\right]=3\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]-\frac{5}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right]+\frac{2}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}1\right]\overset{(i)}{=}3u_{n-1}-\frac{5}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}k\right]+\frac{2}{n}\times n.$

$S_n\overset{(ii)}{=}3u_{n-1}-\frac{5}{n^2}\times\frac{n(n-1)}{2}+2=3u_{n-1}-\frac{5}{2}\times\frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{n}\times n}+2=3u_{n-1}-\frac{5}{2}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)+2$

(i) où (u_n) est la suite définie à la question précédente.
(ii) car $\sum_{k=0}^{n-1}k$ est une somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{3}$, par somme et produit, $\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+2=-\frac{1}{6}$. On peut donc prévoir que pour n très grand l'algorithme donnera des valeurs proches de $-\frac{1}{6}$.

<u>Remarque</u>: En interprétant cette sommes par la méthode des rectangles, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n=\int_0^1 x^2-5x+2\,dx$.

Exercice 2. *Vecteurs*

90 Utiliser des coordonnées pour étudier une configuration

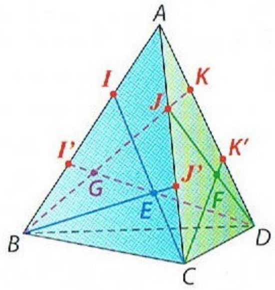
$ABCD$ est un tétraèdre.

Les points I, I', J, J', K et K' sont définis par :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{I'B}$;

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JJ'} = \overrightarrow{J'C}$;

et $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{K'D}$.



E est le point d'intersection des droites (CI) et (BJ'), F celui de (DJ) et (CK'), et G celui de (BK) et (DI').

On s'intéresse à la position relative des plans (BCD) et (EFG).

On munit l'espace du repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.

1 Déterminer les coordonnées des points I, I', J, J', K et K'.

2 a. Justifier que les droites (CI) et (BJ') admettent respectivement pour représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = \dfrac{2t}{3} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3}u \\ y = 0 \\ z = \dfrac{u}{3} \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

b. En déduire les coordonnées du point E.

3 Déterminer les coordonnées du point G.

4 On admet que le point F a pour coordonnées $\left(\frac{1}{7} ; \frac{4}{7} ; \frac{2}{7}\right)$.

Déterminer la position relative des plans (BCD) et (EFG).

---

90 **1** Par définition, $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BI'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

Donc $I\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$ et $I'\left(0 ; 0 ; \frac{1}{3}\right)$.

De même, $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CJ'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, avec $A(0 ; 0 ; 1)$ et $C(1 ; 0 ; 0)$. Donc $J\left(\frac{1}{3} ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$ et $J'\left(\frac{2}{3} ; 0 ; \frac{1}{3}\right)$.

De même, $\overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DK'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, avec $A(0 ; 0 ; 1)$ et $D(0 ; 1 ; 0)$.

Donc $K\left(0 ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$ et $K'\left(0 ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

2 a. La droite (CI) passe par le point $C(1 ; 0 ; 0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Elle admet donc comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = \dfrac{2t}{3} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

La droite (BJ') passe par le point $B(0 ; 0 ; 0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BJ'}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Elle admet donc comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2u}{3} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{u}{3} \end{cases}, \ u \in \mathbb{R}.$$

b. On résout : $\begin{cases} 1 - t = \dfrac{2u}{3} \\ 0 = 0 \\ \dfrac{2t}{3} = \dfrac{u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{7} \\ u = \dfrac{6}{7} \end{cases}.$

Donc le point E a pour coordonnées :

$$\left(1 - \frac{3}{7} ; 0 ; \frac{2}{3} \times \frac{3}{7}\right), \text{ soit } \left(\frac{4}{7} ; 0 ; \frac{2}{7}\right).$$

3 La droite (BK) admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{t}{3} \\ z = \dfrac{2t}{3} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

La droite (DI') admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - u \\ z = \dfrac{u}{3} \end{cases}, \ u \in \mathbb{R}.$

On résout : $\begin{cases} 0 = 0 \\ \dfrac{t}{3} = 1 - u \\ \dfrac{2t}{3} = \dfrac{u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{7} \\ u = \dfrac{6}{7} \end{cases}.$

Donc le point G a pour coordonnées :

$$\left(0 ; \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} ; \frac{2}{3} \times \frac{3}{7}\right), \text{ soit } \left(0 ; \frac{1}{7} ; \frac{2}{7}\right).$$

4 On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Or, $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{GE} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{7}\overrightarrow{BD}$. La droite (EG) est donc parallèle au plan (BCD).

De même, $\overrightarrow{GF} = \frac{1}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BD}$. La droite (GF) est donc parallèle au plan (BCD). On en déduit que le plan (EFG) est parallèle au plan (BCD).