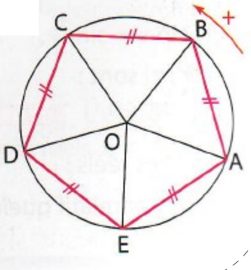
CORRIGÉ du D.M. de mathématiques n°7: *Trigonométrie* — 1ère S1

A rendre le mercredi 9 mai 2012 au début de l'heure

Exercice 1. Ex 4 p 192 Angles orientés dans un pentagone

Énoncé

4 ABCDE est le pentagone de centre O représenté ci-contre.
Déterminer une mesure de :
a) $(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OD})$ **b)** $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC})$
c) $(\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{AB})$ **d)** $(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{AB})$



Corrigé

a) L'angle de 2π de centre O a été partagé en 5 angles égaux qui mesurent donc chacun, en tant qu'angles géométriques (= angles du collège = angles non orientés) $\frac{2\pi}{5}$. En tenant compte de l'orientation, on en déduit $\boxed{(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD})=-\frac{2\pi}{5}\ mod\ 2\pi.}$

b) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=2(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=2\times\frac{2\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}\ mod\ 2\pi.$

c) $(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{BO},-\overrightarrow{BA})=(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA})+\pi$. En effet, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$. Par ailleurs, le triangle ABO est isocèle en O donc ses angles à la base sont égaux d'où $\widehat{OBA}=\widehat{OAB}=\frac{1}{2}(\pi-\frac{2\pi}{5})=\frac{3\pi}{10}$. En tenant compte de l'orientation, on a $(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA})=+\frac{3\pi}{10}\ mod\ 2\pi$, d'où $(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA})+\pi=\frac{3\pi}{10}+\pi=\frac{13\pi}{10}\equiv-\frac{7\pi}{10}\ mod\ 2\pi$.

$$\boxed{(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{AB})=\frac{13\pi}{10}\ mod\ 2\pi.}$$

d) $(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB})\overset{(i)}{=}(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EA})+(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{AB})\overset{(ii)}{=}(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA})+\pi+(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB})+\pi$
$=2\times\left(-\frac{3\pi}{10}\right)+\pi+2\times\left(-\frac{3\pi}{10}\right)+\pi=-\frac{6\pi}{5}+2\pi=\frac{4\pi}{5}\ mod\ 2\pi$

$$\boxed{(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB})=\frac{4\pi}{5}\ mod\ 2\pi}$$

Justifications : *(i) Par Chasles*
(ii) Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$.

Exercice 2. Ex 63 p 202 Équation trigonométrique

Énoncé

1) Résoudre dans ℝ l'équation $\sin 3x=\sin(x+\pi)$

2) a) Résoudre l'équation $\sin 4x=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

- dans $]-\pi\,;\pi]$;
- dans ℝ.

b) Placer les points images des solutions sur un cercle trigonométrique.

Corrigé

1) $\sin 3x=\sin(x+\pi)$
$\Leftrightarrow 3x=(x+\pi)+2k\pi$ ou $3x=\pi-(x+\pi)+2k\pi$
$\Leftrightarrow 2x=\pi+2k\pi$ ou $4x=+2k\pi$
$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ou $x=k\frac{\pi}{2}$

Le premier ensemble de solutions étant contenu dans le deuxième (dessinez-les sur un cercle pour vous en convaincre), les solutions sont tous les nombres de la forme $k\frac{\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Autrement dit, $\boxed{S=\{k\frac{\pi}{2}\ /\ k\in\mathbb{Z}\}}$

2) a) ■ Résolution dans ℝ de $\sin 4x=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$:

$\sin 4x=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
$\Leftrightarrow 4x=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi$ ou $4x=\pi-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi$
$\Leftrightarrow 3x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $5x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$
$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x=\frac{3\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$

Les solutions dans ℝ sont donc les nombres $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ et $x=\frac{3\pi}{10}+\frac{2k'\pi}{5}$ avec $k,k'\in\mathbb{Z}$.

■ L'ensemble des solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ est

$$\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{6};\ \frac{3\pi}{10};\ \frac{7\pi}{10};\ -\frac{9\pi}{6};\ -\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{10}\right\}}$$

b)