D.M. de mathématiques n°7: *Loi binomiale* — 1ère S1

A rendre le mercredi 9 mai 2012 au début de l'heure

Exercice 1.

Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard, successivement et avec remise 10 boules dans l'urne. On appelle succès, lors d'un tirage, l'apparition de la boule numérotée 1.

1) Échauffement : On simule cette expérience avec le programme ci-contre (fait avec Algobox[1]), où $random()$ renvoie un nombre aléatoire A tel que $0 \leqslant A < 1$.
$floor(x)$ désigne la partie entière du nombre x c'est à dire le plus petit nombre entier inférieur ou égal à x.
$floor(1+5\,random())$ permet donc d'obtenir un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 5 suivant une loi équirépartie.

```
VARIABLES
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR floor(1+5*random())
     SI (x==1) ALORS
       DEBUT_SI
       S PREND_LA_VALEUR S+1
       FIN_SI
     FIN_POUR
   AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

a) Que représente la variable x ?
b) Que représente la variable S ?
c) Quel est le rôle de la variable i ?
d) Quelle est la loi de probabilité suivie par le nombre de succès? *Justifier.*

2) Généralisation : L'urne contient B boules numérotées de 1 à B. On tire au hasard, successivement et avec remise n boules dans l'urne. m est un nombre compris entre 1 et B et on appelle succès, lors d'un tirage, l'apparition d'une boule dont le numéro est compris entre 1 et m.

a) Écrire sur votre copie un algorithme afin de simuler cette expérience aléatoire. La variable n sera lue en entrée, les variables m et B seront initialisées au début de l'algorithme.

b) Prouvez que le nombre de succès suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

3) Application : Vous avez sûrement entendu parler du classement PISA qui évalue les systèmes d'enseignement des différents pays. Supposons que le LFJM doive envoyer aux tests PISA six élèves choisis au hasard parmi ses 240 élèves de seconde[2]. On établit un classement des élèves de seconde du lycée Mermoz au vu de leur moyenne générale.

a) Quelle est la probabilité que parmi les six élèves choisis, quatre au moins soient dans le premier quart du classement ?

b) Modifier l'algorithme précèdent[3] pour qu'il simule 10 000 choix[4] au hasard d'un groupe de six élèves parmi les élèves de seconde et comparer le résultat obtenu à la probabilité calculée ci-dessus.
Pour cette question, on ne demande pas d'écrire l'algorithme sur la copie. Précisez les valeurs choisies pour *B*, *m* et *n*.

Exercice 2. Ex 70 p 321 Réponses au hasard à un QCM

Un questionnaire comprend cinq questions. Pour chacune des cinq questions posées,trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seul d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot-réponse de cinq lettres. Par exemple, le mot BBAAC signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions A, aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1) a) Combien y a-t-il de mots-réponses possibles à ce questionnaire ?

b) On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions du questionnaire.

---

[1] ALGOBOX est gratuit et téléchargeable à http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/profplus/logitheque/logitheque.htm

[2] Les tests PISA ont toujours lieu sur des élèves de 15 ans.

[3] Dans Algobox, au lieu de réécrire des lignes, on peut les déplacer avec couper coller: « ctrl + X » puis « ctrl + V »

[4] Faites 100 000 simulations plutôt que 10 000 si votre ordinateur y survit.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
E: « Le candidat a exactement une réponse exacte. »
F: « Le candidat n'a aucune réponse exact . »
G : « Le mot-réponse du candidat est un palindrome. »
(un *palindrome* est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche: par exemple, le mot-réponse BACAB est un palindrome).

2) Un professeur soumet de questionnaire aux 28 élèves de sa classe. Tous les élèves répondent au hasard à chacune des cinq questions. On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot réponse ne comporte aucune réponse exacte.

a) Déterminer la loi de probabilités suivie par la variable aléatoire X.

b) Calculer la probabilité, arrondie à 2 décimales, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

Corrigé du D.M. n°7: *Loi binomiale* — 1ère S1

Exercice 1

Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard, successivement et avec remise 10 boules dans l'urne. On appelle succès, lors d'un tirage, l'apparition de la boule numérotée 1.

1) Échauffement : On simule cette expérience avec le programme ci-contre (fait avec Algobox[5])

```
VARIABLES
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR floor(1+5*random())
     SI (x==1) ALORS
       DEBUT_SI
       S PREND_LA_VALEUR S+1
       FIN_SI
     FIN_POUR
   AFFICHER S
 FIN_ALGORITHME
```

a) x est le numéro de la boule tirée dans l'urne.
b) S compte le nombre de fois où on a obtenu la boule numéro 1.
c) i est le numéro du tirage ; Ainsi, lors du premier tirage, i vaut 1 et lors du dixième tirage, i vaut 10.

d) Quelle est la loi de probabilité suivie par le nombre de succès? *Justifier.*

La variable S suit alors la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}2$. En effet, on répète n = 10 fois l'épreuve de Bernoulli qui consiste à prélever une boule et à noter si son numéro est le 1 ou non. Le succès est le fait d'avoir la boule n°1, de probabilité 0,2. Les tirages sont faits avec remise. L'indépendance est acquise. La variable S qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et 0,2.

2) Généralisation : L'urne contient B boules numérotées de 1 à B. On tire au hasard, successivement et avec remise n boules dans l'urne. m est un nombre compris entre 1 et B et on appelle succès, lors d'un tirage, l'apparition d'une boule dont le numéro est compris entre 1 et m.

a) Écrire sur votre copie un algorithme afin de simuler cette expérience aléatoire. La variable n sera lue en entrée, les variables m et B seront initialisées au début de l'algorithme.

```
VARIABLES
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  B PREND_LA_VALEUR 240
   m PREND_LA_VALEUR 60
   AFFICHER "Entrez n, le nombre de boules tirées."
   LIRE n
   S PREND_LA_VALEUR 0
   POUR i ALLANT_DE 1 A n
     DEBUT_POUR
     x PREND_LA_VALEUR floor(1+B*random())
     SI (x<=m) ALORS
       DEBUT_SI
       S PREND_LA_VALEUR S+1
       FIN_SI
     FIN_POUR
   AFFICHER "Le nombre de succès est "
   AFFICHER S
 FIN_ALGORITHME
```

Explications sur l'algorithme :

- x est le numéro de la boule tirée dans l'urne, c'est donc un entier aléatoire entre 1 et B.
- S compte le nombre de fois où on a obtenu la boule dont le numéro est entre 1 et m.
- i est le numéro du tirage ; Ainsi, lors du premier tirage, i vaut 1 et lors du n$^{\text{ème}}$ tirage, i vaut n.

b) Prouvez que le nombre de succès suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

L'épreuve de Bernoulli consiste à tirer une boule dans l'urne. On considère qu'on a un succès si le numéro de la boule est compris entre 1 et m et un échec dans le cas contraire. La probabilité d'un succès est donc $p=\frac{m}{B}$.

On procède à n tirages indépendants et identiques. La variable qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p=\frac{m}{B}$.

[5] ALGOBOX est gratuit et téléchargeable à http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/profplus/logitheque/logitheque.htm

3) Application : Supposons que le LFJM doive envoyer aux tests PISA six élèves choisis au hasard parmi ses 240 élèves de seconde[6]. On établit un classement des élèves de seconde du lycée Mermoz au vu de leur moyenne générale.

a) Quelle est la probabilité que parmi les six élèves choisis, quatre au moins soient dans le premier quart du classement ?

L'épreuve de Bernoulli consiste à choisir un élève au hasard. On considère qu'on a un succès si l'élève est dans le premier quart du classement et un échec dans le cas contraire. La probabilité d'un succès est donc p=1/4. On procède à n=6 tirages indépendants et identiques. La variable S qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit donc une loi binomiale de paramètres n=6 et p=1/4.

$$P(S\geqslant 4)=P(S=4)+P(S=5)+P(S=6)=\binom{6}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6+\binom{6}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{77}{2048}\approx 0{,}0376 .$$

b) Modifier l'algorithme précèdent[7] pour qu'il simule 10 000 choix[8] au hasard d'un groupe de six élèves parmi les élèves de seconde et comparer le résultat obtenu à la probabilité calculée ci-dessus.
Pour cette question, on ne demande pas d'écrire l'algorithme sur la copie. Précisez les valeurs choisies pour *B, m* et *n*.

```
VARIABLES
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  f EST_DU_TYPE NOMBRE
  Sg EST_DU_TYPE NOMBRE
  Ng EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  B PREND_LA_VALEUR 240
  m PREND_LA_VALEUR 60
  n PREND_LA_VALEUR 6
  Sg PREND_LA_VALEUR 0
  Ng PREND_LA_VALEUR 100000
  POUR k ALLANT_DE 1 A Ng
    DEBUT_POUR
    S PREND_LA_VALEUR 0
    POUR i ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      x PREND_LA_VALEUR floor(1+B*random())
      SI (x<=m) ALORS
        DEBUT_SI
        S PREND_LA_VALEUR S+1
        FIN_SI
      FIN_POUR
    SI (S>=4) ALORS
      DEBUT_SI
      Sg PREND_LA_VALEUR Sg+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  f PREND_LA_VALEUR Sg/Ng
    AFFICHER "Le nombre de groupes comportant au moins 4 élèves dans le premier quart est "
  AFFICHER Sg
  AFFICHER "La proportion de succès est "
  AFFICHER f
FIN_ALGORITHME
```

<u>L'idée derrière l'algorithme</u> : On numérote les élèves de 1 à 240 selon leur classement. L'épreuve de Bernoulli consiste à choisir un élève au hasard. On a un succès si le numéro de l'élève est compris entre 1 et m=60 et un échec dans le cas contraire.

<u>Explications plus techniques sur l'algorithme</u> :

- Ng = Nombre de groupes de six élèves prélevés. Ici, on simule le tirage (avec remise) de 100 000 groupes de 6 élèves donc $Ng=100\,000$.
- Il suffit de rajouter à l'algorithme précèdent une boucle « POUR k ALLANT_DE 1 A Ng », avec $Ng=100\,000$ pour que le choix d'un groupe soit répété 100 000 fois.
- x est le numéro de la boule tirée dans l'urne, c'est donc un entier aléatoire entre 1 et B.
- S compte le nombre de fois où, *à l'intérieur d'un groupe de six élèves donné*, on a obtenu un élève dans le premier quart càd dont le numéro est entre 1 et 240/4=60. Lors du tirage d'un nouveau groupe, on repart à S=0.
- i est le numéro du tirage *à l'intérieur d'un groupe de six élèves donné*, ; Ainsi, lors du tirage du premier élève du groupe, i vaut 1 et lors du tirage du 6$^{\text{ème}}$ élève du groupe, i vaut 6.
- Sg est *le nombre de « groupes à succès »*, c'est à dire le nombre de groupes comportant au moins 4 élèves sur les six dans le premier quart du classement.
- f =Sg/Ng est la proportion de groupes comportant au moins quatre élèves sur les six dans le premier quart du classement.

Avec cet algorithme, j'ai obtenu « `Le nombre de groupes comportant au moins 4 élèves dans le premier quart est 3733. La proportion de succès est f=0.03733` ». Cette fréquence expérimentale est très proche de la fréquence théorique (= la probabilité) calculée ci-dessus.

---

[6] Les tests PISA ont toujours lieu sur des élèves de 15 ans.

[7] Dans Algobox, au lieu de réécrire des lignes, on peut les déplacer avec couper coller: « ctrl + X » puis « ctrl + V »

[8] Faites 100 000 simulations plutôt que 10 000 si votre ordinateur y survit.

Exercice 2. Ex 70 p 321 Réponses au hasard à un QCM

1 a) Chaque réponse comporte 3 possibilités. Un arbre amène à trouver 3^5 = 243 mots-réponses possibles à ce questionnaire.

b) Si l'on note Y le nombre de bonnes réponses obtenues par le candidat[9], alors Y suit une loi binomiale de paramètres 5 et 1/3. En effet, les réponses sont données au hasard, donc elles peuvent être supposées indépendantes les unes des autres. Le candidat répète la même expérience aléatoire à 2 issues (cocher une réponse qui s'avère être bonne ou non) avec une probabilité de réussite de 1/3.

E est l'événement [Y = 1] donc $P(E)=P(Y=1)=\binom{5}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=5\times\frac{16}{3^5}=\frac{80}{243}\approx 0{,}329$.

F est l'événement [Y = 0] donc $P(F)=P(Y=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}\approx 0{,}132$.

G : « *Le mot-réponse du candidat est un palindrome.* » Chaque mot a la probabilité $\frac{1}{3^5}$ d'apparaître.

Il reste à déterminer le nombre de palindromes existants.

Méthode 1 : En représentant les réponses successives au moyen d'un arbre, on voit que l'on a 3 possibilités pour la première réponse, 3 possibilités pour la deuxième réponse et 3 possibilités pour la troisième réponse. Par contre, si on veut un palindrome, on n'a qu'une possibilité pour la quatrième réponse car elle doit être identique à la deuxième. De même, on n'a qu'une possibilité pour la cinquième réponse car elle doit être identique à la première. En comptant les branche de l'arbre, on voit qu'il y a a 3^3= 27 palindromes.

Méthode 2 : On détermine tout d'abord le nombre de palindromes existants et commençants par A (et donc se terminant par A).

cinq A : AAAAA
quatre A : AABAA AACAA
trois A : ABABA ACACA
deux A : ABBBA ACCCA ABCBA ACBCA
un A : impossible
aucun A : impossible

Il y en a donc 9. Il y a 18 autres palindromes commençants par B ou C, soit 27 en tout.

Finalement, $P(G)=\frac{3^3}{3^5}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$. $\boxed{P(G)=\frac{1}{9}}$

2) On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot réponse ne comporte aucune réponse exacte.

2. a) L'épreuve de Bernoulli consiste à corriger la copie d'un élève. On considère qu'on a un succès si l'élève n'a aucune réponse exacte (Cela semble étrange mais puisque X compte par définition le nombre de succès, on est bien obligé de choisir cette définition d'un succès), et un échec dans le cas contraire. La probabilité d'un succès est $p=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}\approx 0{,}132$. (voir ci-dessus)

On procède à 28 répétitions indépendantes et identiques de cette épreuve. La variable X qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit donc une loi binomiale de paramètres n=28 et $p=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}\approx 0{,}132$.

b) Calculons la probabilité, arrondie à 2 décimales, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

L'événement « *Au plus un élève n'a que des réponses fausses* » s'écrit $(X\leqslant 1)=(X=0)\cup(X=1)$.

$$P(X\leqslant 1)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{28}{0}\left(1-\frac{32}{243}\right)^{28}\left(\frac{32}{243}\right)^{0}+\binom{28}{1}\left(1-\frac{32}{243}\right)^{27}\left(\frac{32}{243}\right)^{1}$$
$$=\left(1-\frac{32}{243}\right)^{28}+28\times\left(1-\frac{32}{243}\right)^{27}\left(\frac{32}{243}\right)\approx 0{,}1006.$$

$\boxed{P(X\leqslant 1)\approx 0{,}10}$

[9] X est défini autrement par l'énoncé, on ne peut donc pas appeler cette variable aléatoire X.