D.M. n°7 : Fonctions de référence CORR=V | 2nde

A rendre le vendredi 15 mars 2013

Nom : . . . . Prénom :	Communication : − ± + Technique : − ± + Raisonnement : − ± +	Signature des parents : Vu	Note : $\frac{}{5}$

Il faut toujours prouver vos affirmations *(sauf mention contraire de l'énoncé).*

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=\frac{-3}{(x+2)^2}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) a) Déterminer les coordonnés des points d'intersection éventuels de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
b) Déterminer les coordonnés des points d'intersection éventuels de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

3) a) Visualisez la courbe de cette fonction sur votre calculatrice et conjecturer ses variations. (« *f est croissante sur ... et décroissante sur ....*)

b) Démontrer[1] les conjectures faites puis dresser le tableau de variations de f .

4) Donner le meilleur encadrement possible de f dans les cas suivants :
a) $x\in[-1\ ;3]$ **b)** $x\in[-10002\ ;-3[$

5) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x)<-12$. (Vérifiez que ces résultats sont cohérents avec les variations de f !)

Exercice 2.

1) On sait que la longueur du côté d'un carré vaut, au millimètre près, 15 cm. Quelle est l'incertitude sur son aire ?

2) On sait que la longueur du côté d'un carré vaut, au millimètre près, ℓ cm avec $\ell>0{,}1$. Quelle est l'incertitude sur son aire ?

On pourra noter comme en physique l'incertitude sur l'aire par ΔA .

[1] *Pour montrer qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I on peut utiliser la définition : On prend deux nombres a et b dans I avec par exemple a<b et grâce à des manipulation d'inégalités (soigneusement justifiées) on établit que f(a)<f(b).*
De même, pour montrer qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I, on prend deux nombres a et b dans I avec a<b et grâce à des manipulation d'inégalités on établit que f(a)>f(b) .

Corrigé

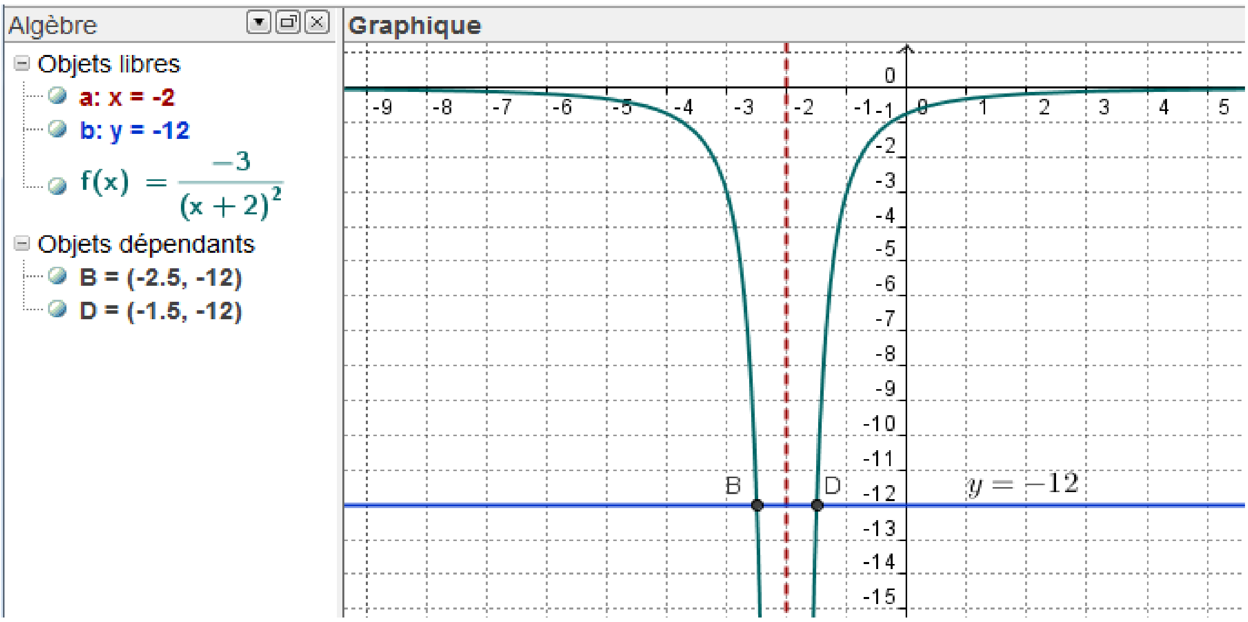
Exercice 1.

1) La seule valeur interdite est celle qui annule le dénominateur donc le domaine de définition de f est $\boxed{D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[}$

2) a) $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0. Comme $f(0)=-\dfrac{3}{4}$, <u>le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnés</u> $\left(0;-\dfrac{3}{4}\right)$.

b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de $f(x)=0$. Or $f(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{(x+2)^2}$ ce qui est impossible. On en déduit que $\mathscr{C}$ <u>avec ne coupe pas l'axe des abscisses</u>.

3) a) Conjectures au vu de la courbe : f semble décroissante sur $]-\infty,-2[$ et croissante sur $]-2,+\infty[$.



b) Variations et tableau de variations de f.

• *Montrons que f est décroissante sur* $]-\infty,-2[$.

Soient $a,b\in]-\infty,-2[$ avec $a<b$.

$a<b<-2$

$\Rightarrow a+2<b+2<-2+2=0$

$\Rightarrow (a+2)^2>(b+2)^2$ *car $x\mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ (On applique la fonction carré aux nombre négatifs a+2 et b+2)*

$\Rightarrow \dfrac{1}{(a+2)^2}<\dfrac{1}{(b+2)^2}$ *car $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ (On applique la fonction inverse aux nombre <u>positifs</u> $(a+2)^2$ et $(b+2)^2$.)*

$\Rightarrow \dfrac{-3}{(a+2)^2}>\dfrac{-3}{(b+2)^2}$ *car multiplier par un nombre négatif retourne les inégalités.*

$\Leftrightarrow f(a)>f(b)$

Finalement, on a prouvé que pour tous réels a et b de $]-\infty,-2[$, $a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$: f est donc décroissante sur $]-\infty,-2[$.

• *Montrons que f est croissante sur* $]-2,+\infty[$.

Soient $a,b\in]-2,+\infty[$ avec $a<b$.

$-2<a<b$

$\Rightarrow 0<a+2<b+2$

$\Rightarrow (a+2)^2<(b+2)^2$ *car $x\mapsto x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$ (On applique la fonction carré aux nombre positifs a+2 et b+2)*

$\Rightarrow \dfrac{1}{(a+2)^2}>\dfrac{1}{(b+2)^2}$ *car $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ (On applique la fonction inverse aux nombre positifs $(a+2)^2$ et $(b+2)^2$.)*

$\Rightarrow \quad \dfrac{-3}{(a+2)^2} < \dfrac{-3}{(b+2)^2}$ *car multiplier par un nombre négatif retourne les inégalités.*

$\Leftrightarrow \quad f(a) < f(b)$

Finalement, on a prouvé que pour tous réels a et b de $]-2,+\infty[$, $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$: f est donc croissante sur $]-2,+\infty[$.

• Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↗

4) a) Meilleur encadrement possible de f si $x \in [-1\ ;3]$:

Si $-1 \leqslant x \leqslant 3$ alors $f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(3)$ car f est croissante sur $]-2;+\infty[$, càd $\boxed{-3 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{-3}{25}}$.

b) a) Meilleur encadrement possible de f si $x \in [-10\,002\ ;-3[$:

Si $-10\,002 \leqslant x \leqslant -3$ alors $f(-10\,002) \geqslant f(x) \geqslant f(-3)$ car f est décroissante sur $]-\infty,-2[$. En remplaçant les bornes par leur valeur, on obtient : $\boxed{-3 \leqslant f(x) \leqslant -3 \times 10^{-8}}$.

5) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) < -12$. On suppose $x \neq -2$

$\dfrac{-3}{(x+2)^2} < -12$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{(x+2)^2} > 4$ *car diviser par le nombre négatif -3 retourne les inégalités.*

$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 < \dfrac{1}{4}$ *car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$ (On applique la fonction inverse à des nombre positifs.)*

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - \dfrac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \left(x+2+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+2-\dfrac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{5}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right) < 0$. On résout avec un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-5/2$		-2		$-3/2$	$+\infty$
(x+5/2)	$-$	0	+	‖	+		+
(x+3/2)	$-$		$-$	‖	$-$	0	+
(x+5/2)(x+3/2)	+	0	$-$	‖	$-$	0	+

Finalement, $\boxed{f(x) < 12 \text{ ssi } x \in \left]-\dfrac{5}{2};-2\right[\cup \left]-2;-\dfrac{3}{2}\right[}$, ce qui est cohérent avec la résolution graphique.

Exercice 2.

1) On sait que la longueur du côté d'un carré vaut, au millimètre près, 15 cm. Quelle est l'incertitude sur son aire ?

Notons x la longueur du côté du carré en cm. Par hypothèse $14{,}9 \leqslant x \leqslant 15{,}1$. On en déduit que l'aire du carré vérifie $14{,}9^2 \leqslant x^2 \leqslant 15{,}1^2$ càd $222{,}01\, cm^2 \leqslant x^2 \leqslant 228{,}01\, cm^2$.

L'incertitude sur l'aire est donc $\Delta A = 228{,}01 - 222{,}01 = 6\, cm^2$. $\boxed{\Delta A = 6\, cm^2}$

2) On sait que la longueur du côté d'un carré vaut, au millimètre près, ℓ cm avec $\ell > 0{,}1$. Quelle est l'incertitude sur son aire ?

Notons x la longueur du côté du carré en cm. Par hypothèse $0 \leqslant \ell - 0{,}1 \leqslant \ell \leqslant \ell + 0{,}1$. On en déduit que l'aire du carré vérifie $(\ell - 0{,}1)^2 \leqslant \ell^2 \leqslant (\ell + 0{,}1)^2$.

L'incertitude sur l'aire est donc $\Delta A = (\ell + 0{,}1)^2 - (\ell - 0{,}1)^2 = 0{,}4\,\ell\, cm^2$. $\boxed{\Delta A = 0{,}4\,\ell\, cm^2}$