

A rendre le jeudi 14 mars 2013 au début de l'heure

**Exercice 1.**

On veut étudier l'existence et le nombre d'extremum de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 2\sin x$ . Pour cela on étudie d'abord la fonction  $f'$  dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

1) Étude de  $f'$  :

a) Vérifier que  $f'(x) = 2(x - \cos x)$  et étudier les variations de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Préciser les limites de  $f'$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

2) Montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet une et une seule solution dans  $\mathbb{R}$ , notée  $\alpha$ . Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.

3) Donner le signe de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ . En déduire le tableau de variations de  $f$  et justifier l'existence d'un seul minimum  $m$  pour  $f$ .

4) Montrer que  $m$  vérifie  $m = \alpha^2 - 2\sqrt{1 - \alpha^2}$ .

**Exercice 2.**

Yannis joue à un jeu vidéo de football. Lors d'un match contre l'ordinateur, il se retrouve à la phase des tirs au but. C'est au tour de l'ordinateur de tirer et Yannis dirige le gardien.

Suite à un tir, au moment où le ballon atteint la ligne de but, on mesure sa distance à l'axe central vertical du but, que l'on note  $X$  (en mètres). Sachant que la largeur des buts est de 7,32 mètres, le tir est donc cadré si  $|X| < 3,66$  (On suppose que les tirs ne partent jamais trop haut sans ce jeu).

On suppose que l'ordinateur dirige le tir aléatoirement, de telle sorte que  $X$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

1) a) En mode « amateur » les concepteurs du jeu veulent que l'ordinateur cadre ses buts avec une probabilité de 0,95. Quelle valeur de  $\sigma$  doivent-ils fixer pour ce mode ?

b) En mode « professionnel » les concepteurs du jeu veulent que l'ordinateur cadre ses buts avec une probabilité de 0,99. Quelle valeur de  $\sigma$  doivent-ils fixer pour ce mode ?

Au moment du tir, si le gardien est à gauche il arrête tous les tirs cadrés pour lesquels  $X < -1$  ; si le gardien est à droite il arrête tous les tirs cadrés pour lesquels  $X > 1$  et si le gardien est au centre il arrête tous les tirs cadrés pour lesquels  $|X| \leq 1$ .

2) a) Yannis adopte la stratégie suivante : il dirige systématiquement le gardien vers la droite lors du tir au but de l'ordinateur. Quelle est la probabilité qu'il encaisse un but en mode « amateur » ? et en mode « professionnel » ?

b) Mohamed lui conseille de plutôt laisser systématiquement le gardien au centre. Yannis a-t-il intérêt à suivre ce conseil ?