D.M. n°8 : Nombres Complexes — TS 1

A rendre le mercredi 23 avril 2014

Nom : . . . . Prénom :	Communication : ☺ 😐 ☹ Technique : ☺ 😐 ☹ Raisonnement : ☺ 😐 ☹	Note : $\overline{}$ 5

Rappel : La rédaction des DM doit être individuelle.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0=1$ et $z_{n+1}=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n=|z_n|$ pour tout entier naturel n.

1) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

2) a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3) On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrées	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R>P$
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P=0{,}5$?

b) Pour $P=0{,}01$ on obtient $n=33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $z_n=r_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

b) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

d) Compléter la figure donnée en annexe (au dos de cette page), à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9. Les traits de construction seront apparents.

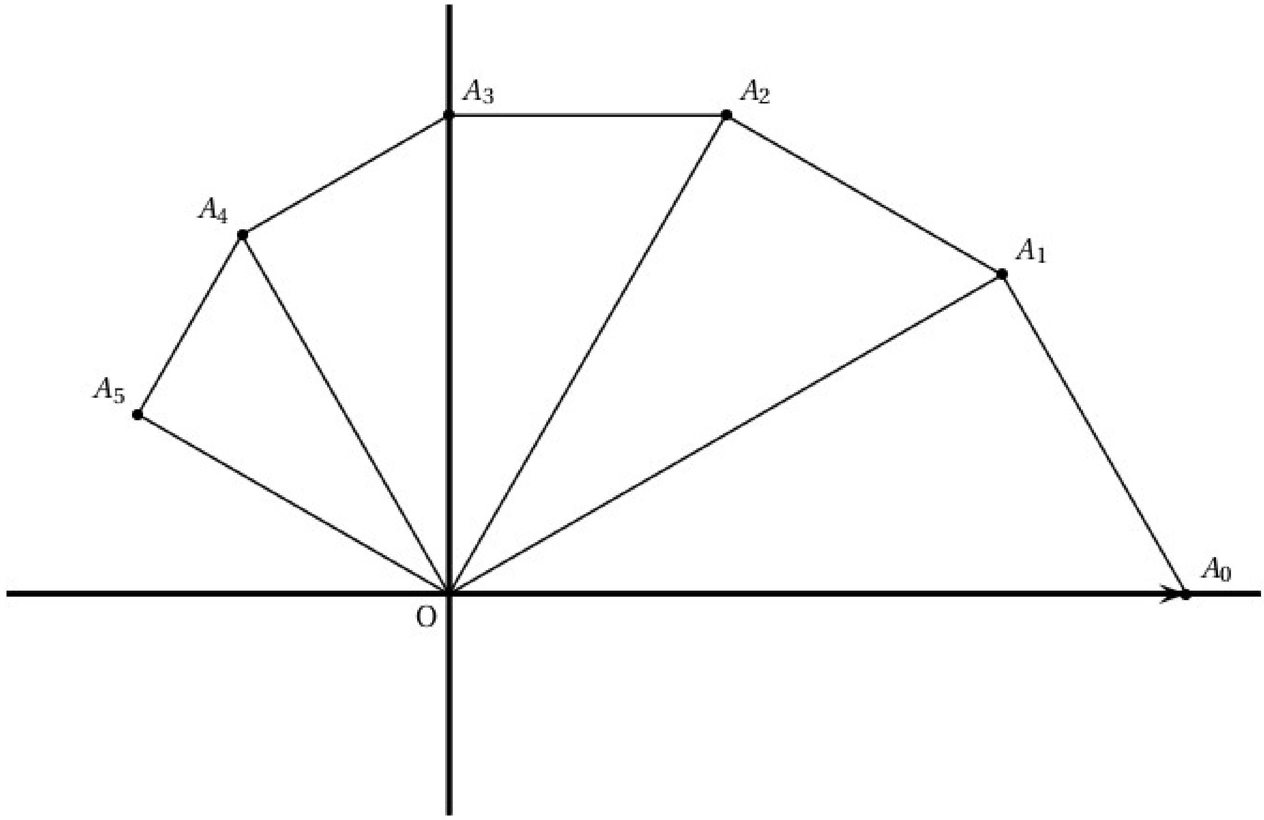
5) Soit ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1....A_nA_{n+1}$

a) Exprimer ℓ_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de (ℓ_n) si elle existe.

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie



Corrigé

Pondichery_S_avril_2014_corr exo 3_5 pts_modifié
d'après un corrigé de l'AMPEP, merci à Denis Verges !

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0=1$ et $z_{n+1}=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n$. On définit la suite (r_n) par $r_n=|z_n|$ pour tout entier naturel n.

1) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

$\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}}=\sqrt{\frac{12}{16}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$.

Or $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ donc le nombre complexe $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ a pour module $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{6}$ donc sa forme exponentielle est $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. $\boxed{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

Remarque : On peut faire plus efficace au niveau du calcul : la factorisation « se voit » et si on ne la voit pas, multiplier le numérateur et le dénominateur par 4 est selon moi plus rapide que de multiplier par l'inverse du quotient.

2) a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$. $r_{n+1}=|z_{n+1}|=\left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n\right|=\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right|\times|z_n|=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n$ donc la suite (r_n) est géométrique de raison $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0=|z_0|=1$.

b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n. La suite (r_n) est géométrique donc, pour tout entier naturel n, $r_n=r_0\times q^n$, donc $\boxed{r_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}$.

c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$? $OA_n=|z_n|=r_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$; or $-1<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ donc la suite (r_n) converge vers 0. La longueur OA_n tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3) On considère l'algorithme suivant :

a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P=0{,}5$?

On fait tourner l'algorithme donné dans le texte en prenant pour P la valeur 0,5:

	n	R	P	R>P ?
Initialisation	0	1	0,5	VRAI
Traitement	1	$r_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}866$	0,5	VRAI
	2	$r_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0{,}75$	0,5	VRAI
	3	$r_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\approx 0{,}6495$	0,5	VRAI
	4	$r_4=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=0{,}5625$	0,5	VRAI
	5	$r_5=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\approx 0{,}49$	0,5	FAUX
Sortie	Afficher 5			

La valeur affichée par l'algorithme pour $P=0{,}5$ est 5.

b) Pour P=0,01 on obtient n=33. Quel est le rôle de cet algorithme ?
Cet algorithme s'arrête dès que $R\leqslant P$ et affiche alors n, c'est-à-dire qu'il affiche la plus petite valeur de n pour laquelle R donc $r_n=OA_n$ est inférieur ou égal à P.

On peut donc dire que $OA_{32}>0{,}01$ et que $OA_{33}\leqslant 0{,}01$.
Vérification à la calculatrice: $r_{32}\approx 0{,}01002$ et $r_{33}\approx 0{,}00868$.

Les étapes de l'algorithme doivent figurer sur la copie.

4) a) $z_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $z_{n+1}=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n$. donc (z_n) est une suite géométrique de raison $z_1=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)$ et de premier terme $z_0=1$. Pour tout entier n, on a donc $z_n=z_0(z_1)^n=(z_1)^n$. Or d'après 1) $z_1=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $z_n=(z_1)^n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$. Finalement, Pour tout entier naturel n, $\boxed{z_n=(z_1)^n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}}$.

On pouvait aussi le prouver par récurrence.

b) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}. On considère le triangle OA_nA_{n+1}.

■ *Méthode 1 : réciproque du théorème de Pythagore*

$OA_n=r_n$ donc $(OA_n)^2=r_n^2$. $OA_{n+1}=r_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n$ donc $(OA_{n+1})^2=\frac{3}{4}r_n^2$.

$A_nA_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|=\left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n-z_n\right|=\left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}-1\right)z_n\right|=\left|-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right|\times|z_n|=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}\times r_n=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}}r_n=\sqrt{\frac{4}{16}}r_n=\frac{1}{2}r_n$ donc

$(A_nA_{n+1})^2=\frac{1}{4}r_n^2$. On a donc $(A_nA_{n+1})^2+(OA_{n+1})^2=\frac{1}{4}r_n^2+\frac{3}{4}r_n^2=r_n^2=(OA_n)^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, <u>le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}</u>.

■ *Méthode 2 : calculs d'angles via les arguments*

Notre but est de montrer que l'angle $(\overrightarrow{A_{n+1}O},\overrightarrow{A_{n+1}A_n})$ est droit. Calculons une mesure de cet angle :

$$(\overrightarrow{A_{n+1}O},\overrightarrow{A_{n+1}A_n})\overset{(i)}{=}(\overrightarrow{A_{n+1}O},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{A_{n+1}A_n})=-(\vec{u},\overrightarrow{A_{n+1}O})+(\vec{u},\overrightarrow{A_{n+1}A_n})=-arg(0-z_{n+1})+arg(z_n-z_{n+1})$$

$$=arg\left(\frac{z_n-z_{n+1}}{-z_{n+1}}\right)=arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right)=arg\left(1-\frac{z_n}{z_{n+1}}\right)\overset{(ii)}{=}arg\left(1-\frac{(z_1)^n}{(z_1)^{n+1}}\right)=arg\left(1-\frac{1}{z_1}\right)$$

(i) relation de Chasles pour les angles orientés, ; (ii) car $z_n=(z_1)^n$ d'après 4 a).

Or $z_1=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $\frac{1}{z_1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $1-\frac{1}{z_1}=1-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=1-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=1-1+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}=+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}$, qui a pour argument $\frac{\pi}{2}$. On a donc prouvé que $(\overrightarrow{A_{n+1}O},\overrightarrow{A_{n+1}A_n})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ donc l'angle $(\overrightarrow{A_{n+1}O},\overrightarrow{A_{n+1}A_n})$ est droit ce qui prouve que <u>le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}</u>.

c) Le point A_n, d'affixe z_n, appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son argument est $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ modulo 2π, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ modulo π, donc il peut s'écrire $\frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

$z_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$ d'après 4a), donc le nombre z_n a pour argument $\frac{n\pi}{6}$; $\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow n=3+6k$.

Mais n est un entier naturel donc k doit être strictement positif donc appartenir à $\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Finalement, le point } A_n \text{ appartient à l'axe des ordonnées si } n \text{ s'écrit } 3+6k \text{ avec } k\in\mathbb{N}.}$

d) Compléter la figure donnée en annexe en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.

Le point A_6 a pour affixe z_6 qui a pour argument $\frac{6\pi}{6}=\pi$; ce point est donc sur l'axe des abscisses.Comme le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_6, on trace le cercle de diamètre OA_5; le point A_6 est à l'intersection de ce cercle et de l'axe des abscisses. [*On utilise le fait qu'un triangle rectangle est inscrit dans le cercle ayant pour diamètre son hypoténuse.*]

Le point A_7 a pour affixe z_7 qui a pour argument $\frac{7\pi}{6}$; donc les points A_1, O et A_7 sont alignés. Le point A_7 se trouve donc à l'intersection du cercle de diamètre OA_6 et de la droite (OA_1).

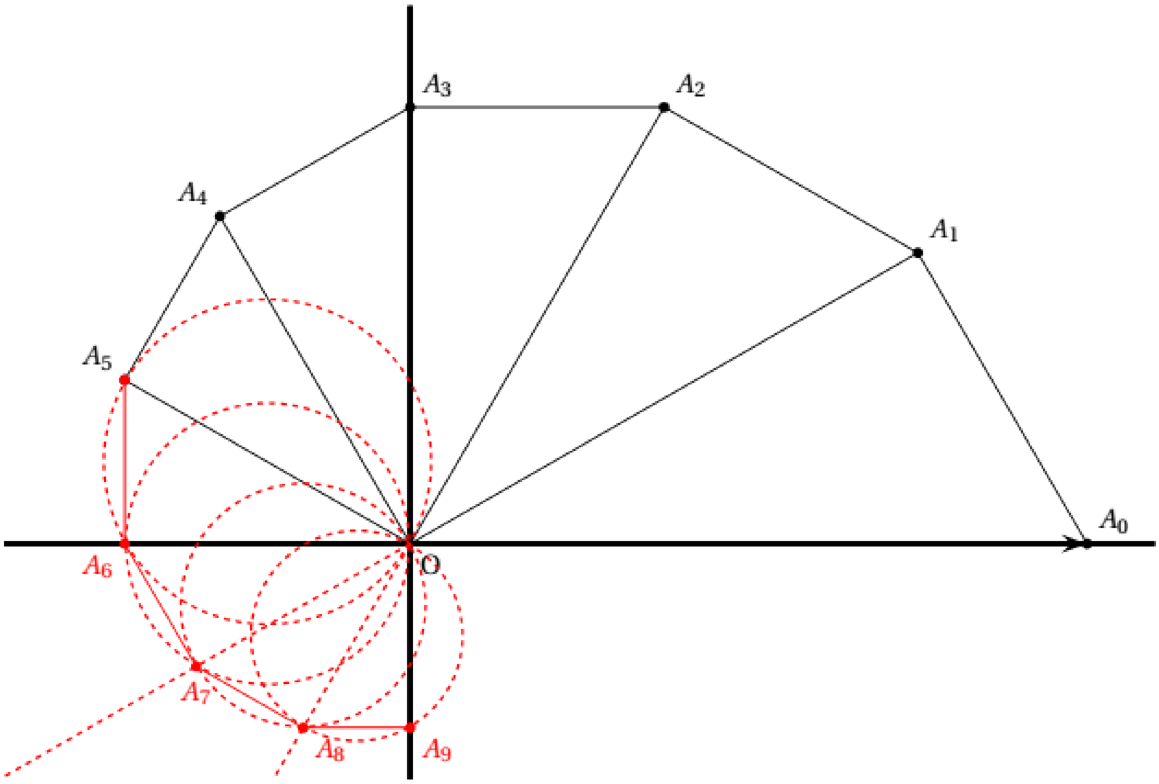
Etc. (Voir figure en annexe)

Remarque: les points A_3 et A_9 appartiennent à l'axe des ordonnées, ce qui correspond bien à la réponse trouvée à la question **4.c.**

[Le sujet de bac s'arrêtait ici. Vous avez du rab!]

5) Soit ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1....A_nA_{n+1}$.

a) Exprimer ℓ_n en fonction de n .



On a $\ell_n=A_0A_1+A_1A_2+....+A_nA_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=n}A_kA_{k+1}$. Pour exprimer ℓ_n en fonction de n , on a donc besoin de l'expression de la distance A_kA_{k+1} . Notons-la w_k .

Or, on a vu que pour tout entier naturel n, $z_n=z_1^n$ avec $z_1=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, donc

$$A_kA_{k+1}=|z_{k+1}-z_k|=|z_1^{k+1}-z_1^k|=|z_1^k(z_1-1)|=|z_1|^k|z_1-1|=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k\left|-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right|=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$$

$$\boxed{w_k=A_kA_{k+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k}$$

Remarque : On aurait pu trouver que $w_k=A_kA_{k+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$ *par des méthodes de géométrie élémentaires : Ceux qui ont démontré du fait que le triangle est rectangle au moyen de la réciproque du théorème de Pythagore ont au passage établi que* $A_nA_{n+1}=\frac{1}{2}r_n$.

On pouvait aussi voir que le triangle OA_nA_{n+1} *est rectangle en* A_{n+1} *avec l'angle en O de mesure* $\frac{\pi}{6}=30^\circ$ *et* $OA_n=r_n$ *. SOH CAH TOA finit le travail.*

(w_k) est donc une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit par la formule d'addition de termes consécutifs d'ne suite géométrique que

$$\ell_n=\sum_{k=0}^{k=n}A_kA_{k+1}=\sum_{k=0}^{k=n}w_k=\frac{w_0-w_{n+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\overset{(i)}{=}\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{2-\sqrt{3}}$$

(i) en multipliant le haut et le bas par 2.

Finalement, pour tout entier naturel n, $\boxed{\ell_n=\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{2-\sqrt{3}}}$.

b) Déterminer la limite de (ℓ_n) si elle existe.

$n\longmapsto\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$; or $-1<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ donc la suite $n\longmapsto\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ converge vers 0 d'où, par somme et quotient de limites, $\lim_{n\to+\infty}\ell_n=\frac{1-0}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\ell_n=2+\sqrt{3}}$