D.M. n°9 : Fonctions de référence	TS1

A rendre le lundi 24 mars 2014

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Note : $\overline{}$ **5**

Rappel : La rédaction des DM doit être individuelle.

Exercice FdR 8. Manipulation réfléchie d'inégalités

1) Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)=\frac{-4}{x^2+5}$ sur $]-3;-1]$. *Justifier le passage d'une inégalité à l'autre.*

2) Même question avec $f(x)=\frac{-4}{x^2}+5$ sur $[-4;-2[$.

3) Même question avec $f(x)=\frac{-4}{(x-5)^2}$ sur $[-3;-1[$.

Exercice FdR 16.

1) Soient a et b deux nombres réels. Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Tracer la courbe représentative de f et placer a et b sur l'axe des abscisses. Représenter sur le même graphique $f(a)$, $f(b)$, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Certains de ces nombres figureront sur l'axe des abscisses et d'autres sur l'axe des ordonnées.

2) Au moyen de votre graphique conjecturer lequel des deux nombres $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ est le plus grand.

3) Prouver votre conjecture.

Corrigé

Exercice FdR 8. Manipulation réfléchie d'inégalités

Il ne vous aura pas échappé que le but de l'exercice est avant tout de savoir si vous savez utiliser les règles de manipulations d'inégalités : Il faut donc écrire les étapes et citer les règles en toute lettres (les numéros R1, R2...etc ne suffiront pas dans votre copie de contrôle).

1) Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)=\frac{-4}{x^2+5}$ **sur** $]-3;-1]$. *Justifier le passage d'une inégalité à l'autre.* Soit $x\in]-3;-1]$

$-3<x\leqslant -1$

$\Rightarrow$ $9>x^2\geqslant 1$ *car* $x\mapsto x^2$ *est décroissante sur* $]-\infty;0]$ *(On applique la fonction carré aux nombres négatifs -3, x et -1)*

$\Rightarrow$ $14>x^2+5\geqslant 6$ *car* $x\mapsto x+5$ *(càd la fonction qui ajoute 5) est croissante sur* $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $\frac{1}{14}<\frac{1}{x^2+5}\leqslant\frac{1}{6}$ *car* $x\mapsto\frac{1}{x}$ *est décroissante sur* $]0;+\infty[$ *(On applique la fonction inverse aux nombres positifs 14,* x^2+5 *et 6.)*

$\Rightarrow$ $\frac{-4}{14}>\frac{-4}{x^2+5}\geqslant\frac{-4}{6}$ *car*[1] $x\mapsto -4x$ *(càd la fonction qui multiplie par -4) est décroissante sur* $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ $-\frac{2}{7}>\frac{-4}{x^2+5}\geqslant-\frac{2}{3}$

Finalement, on a prouvé que si $x\in]-3;-1]$ alors $-\frac{2}{3}\leqslant\frac{-4}{x^2+5}<-\frac{2}{7}$.

2) Même question avec $f(x)=\frac{-4}{x^2}+5$ sur $[-4;-2[$.

$-4\leqslant x<-2$

$\Rightarrow$ $16\geqslant x^2>4$ *car* $x\mapsto x^2$ *est décroissante sur* $]-\infty;0]$ *donc sur* $]-4;2]$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{16}\leqslant\frac{1}{x^2}<\frac{1}{4}$ *car* $x\mapsto\frac{1}{x}$ *est décroissante sur* $]0;+\infty[$ *donc sur* $]4;16]$

$\Rightarrow$ $\frac{-4}{16}\geqslant\frac{-4}{x^2}>\frac{-4}{4}$ *car* $x\mapsto -4x$ *(càd la fonction qui multiplie par -4) est décroissante sur* $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{4}\geqslant\frac{-4}{x^2}>-1$

$\Rightarrow$ $-\frac{1}{4}+5\geqslant\frac{-4}{x^2}+5>-1+5$ *car* $x\mapsto x+5$ *(càd la fonction qui ajoute 5) est croissante sur* $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ $\frac{19}{4}\geqslant\frac{-4}{x^2}+5>4$

Finalement, on a prouvé que si $[-4;-2[$ alors $4<\frac{-4}{x^2}+5\leqslant\frac{19}{4}$.

3) Même question avec $f(x)=\frac{-4}{(x-5)^2}$ sur $[-3;-1[$.

$-3<x\leq -1$

$\Rightarrow$ $-8\leqslant x-5<-6$ *car* $x\mapsto x-5$ *(càd la fonction qui soustrait 5) est croissante sur* $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $64\geqslant(x-5)^2>36$ *car* $x\mapsto x^2$ *est décroissante sur* $]-\infty;0]$ *donc sur* $[-8;-6[$.

$\Rightarrow$ $\frac{1}{64}\leqslant\frac{1}{(x-5)^2}<\frac{1}{36}$ *car* $x\mapsto\frac{1}{x}$ *est décroissante sur* $]0;+\infty[$ *(On applique la fonction inverse aux nombres positifs 64,* $(x-5)^2$ *et 36.)*

$\Rightarrow$ $\frac{-4}{64}\geqslant\frac{-4}{(x-5)^2}>\frac{-4}{36}$ *car* $x\mapsto -4x$ *(càd la fonction qui multiplie par -4) est décroissante sur* $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{16}\geqslant\frac{-4}{x^2+5}>-\frac{1}{9}$

Finalement, on a prouvé que si $x\in]-3;-1]$ alors $-\frac{1}{9}<\frac{-4}{x^2+5}\leqslant-\frac{1}{16}$.

[1] On peut aussi dire « *car multiplier par un nombre négatif retourne les inégalités.* »

○ Exercice FdR 16.

1) On teste sur trois exemples (dans votre copie, un seul suffit) :

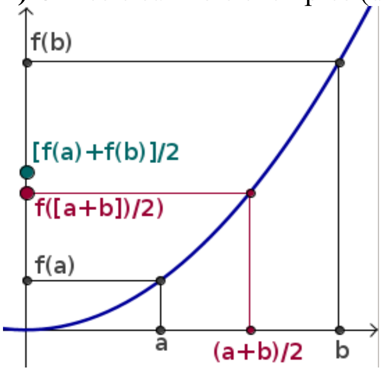

figure 1

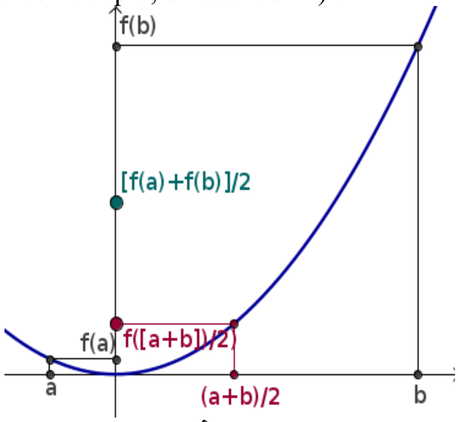

figure 2

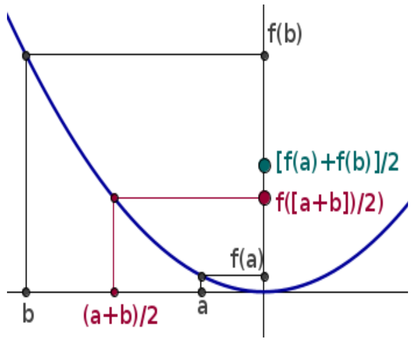

figure 3

Sur les trois essais faits ci-dessus, on a toujours $\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

2) ***Conjecture*** : Quels que soient les nombres réels a et b, $\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, où f est la fonction carré.

On peut avoir égalité si a=b d'où le « supérieur ou égal » plutôt que « strictement supérieur » dans la conjecture.

3) Prouver votre conjecture.

Travail de recherche au brouillon *(qui n'a pas à figurer sur la copie). On cherche à réécrire la conclusion pour la mettre sous une forme où elle sera plus facile à démontrer.*

$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ *par définition de la fonction carré*

$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$ *en développant au moyen des identités remarquables.*

$2a^2+2b^2 \geq a^2+b^2+2ab$ *car multiplier par 4 qui est positif ne retourne pas les inégalités.*

$a^2+b^2-2ab \geqslant 0$ *car soustraire a^2+b^2+2ab aux deux membres ne retourne pas les inégalités.*

$(a-b)^2 \geqslant 0$ *en factorisant au moyen des identités remarquables.*

On arrive donc à $(a-b)^2 \geqslant 0$, qui est vrai car un carré est toujours positif.

Ce qui figure sur la copie : *Notre raisonnement mis au propre, que l'on a obtenu en faisant la démarche précédente dans l'autre sens.*

Soient a et b deux nombres réels quelconques.

$(a-b)^2 \geqslant 0$ *est vrai car un carré est toujours positif*

$\Rightarrow$ $a^2+b^2-2ab \geqslant 0$ *en développant au moyen des identités remarquables.*

$\Rightarrow$ $2a^2+2b^2 \geq a^2+b^2+2ab$ *car ajouter a^2+b^2+2ab aux deux membres ne retourne pas les inégalités.*

$\Rightarrow$ $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$ *car diviser par 4 qui est positif ne retourne pas les inégalités.*

$\Rightarrow$ $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ *en factorisant le membre de droite au moyen des identités remarquables.*

$\Rightarrow$ $\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ *puisque f est la fonction carré*

Plus tard : Raisonnement par équivalence *(quand nous serons au point sur les raisonnements par équivalence)*. La difficulté est qu'à chaque étape, avant d'écrire $P \Leftrightarrow Q$, on doit vérifier qu'on a bien $P \Rightarrow Q$ ET $Q \Rightarrow P$. Cela donnera :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2+2b^2 \geq a^2+b^2+2ab$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2-2ab \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-b)^2 \geqslant 0$$

On arrive donc à $(a-b)^2 \geqslant 0$ ce qui est vrai car un carré est toujours positif !