D.M. n°9 : Produit scalaire + Feuille 15 sur WIMS | T.S.

Partie I = Ex 83 p 315 Les trois perpendiculaires

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(4;-2;3)$, $B(1;-6;4)$ et $C(-1;0;-4)$.

1) a) Démontrer que les point A, B et C ne sont pas alignés.

b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c) Déterminer une équation du plan (ABC).

2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées du point O', projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3) On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH}=t\,\overrightarrow{BC}$.

a) Démontrer que $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$.

b) En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

c) Justifier que les droites (O'H) et (BC) sont perpendiculaires.

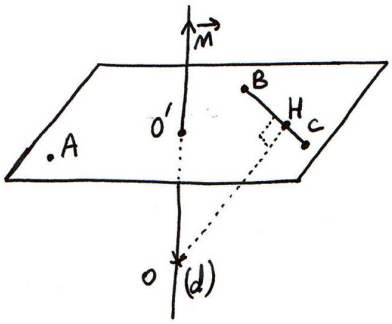
4) a) Démontrer que la sphère de contre O et de rayon OH coupe le plan (ABC) suivant un cercle Γ.

b) Ce cercle est-il tangent à la droite (BC) ? *On ne demande pas de calculer le rayon du cercle* Γ.

CORRIGÉ

Vos copies manquent terriblement de petits dessins qui aident pourtant à voir ce qui se passe ! Par exemple je vois mal quelqu'un réussir la question avec la sphère sans un petit dessin...

Illustration



1) a) Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\\-7\end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les point A, B et C ne sont pas alignés.

b) Pour montrer qu'un vecteur est normal à un plan, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan : On a $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=-3\times1-4\times(-1)+1\times(-1)=-3+4-1=0$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=-5\times1+2\times(-1)-7\times(-1)=-5-2+7=0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. $\vec{n}$ est donc orthogonal **à deux vecteurs non colinéaires** du plan (ABC) donc $\boxed{\vec{n}\text{ est un vecteur normal au plan (ABC)}}$.

c) $M\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-4\\y+2\\z-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow x-y-z-4-2+3=0 \Leftrightarrow x-y-z-3=0$.

$\boxed{\text{Le plan (ABC) a pour équation } x-y-z-3=0}$

2) a) la droite est orthogonale au plan (ABC) donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de d. Comme on sait de plus que d passe par le point O, on obtient la représentation paramétrique suivante de la droite d passant par le point O et orthogonale au plan (ABC) : $M(x,y,z)\in d \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{OM}=t\vec{n} \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-t\end{cases}$. Le système de relations $\boxed{\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})}$ est une représentation paramétrique de la droite d.

b) Le point O', projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC), appartient à la fois à d et (ABC). Ses coordonnées vérifient donc $\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-t\\x-y-z-3=0\end{cases}$ pour un certain réel t. Ceci entraîne $t+t+t-3=0$ d'où $t=1$.

$\boxed{\text{Les coordonnées de O' sont donc } (1;-1;-1).}$

3) On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH}=t\,\overrightarrow{BC}$.

a) $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC} \overset{(i)}{=} (\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HO})\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{BC} \overset{(ii)}{=} \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+0 \overset{(iii)}{=} t\,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=t\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$ d'où $\boxed{t=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}}$.

(i) par Chasles (ii) H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC) donc $\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ *(iii) car* $\overrightarrow{BH}=t\,\overrightarrow{BC}$

b) En déduire le réel t et les coordonnées du point H. $\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix}-1\\6\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\6\\-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=70$ et $\|\overrightarrow{BC}\|^2=104$

d'où $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}=\dfrac{35}{52}$ et $H\left(-\dfrac{9}{26};-\dfrac{51}{36};-\dfrac{18}{13}\right)$.

c) Méthode 1 : On calcule le produit scalaire de $\overrightarrow{O'H}$ et $\overrightarrow{BC}$ grâce à leurs coordonnées et on trouve zéro donc les droites (O'H) et (BC) sont orthogonales. Comme de plus elles se coupent en H, <u>les droites (O'H) et (BC) sont perpendiculaires</u>.

Méthode 2 : La droite (BC) est orthogonales à (OO') et à (OH) qui sont deux droites sécantes du plan (OO'H). Par le théorème de la porte, (BC) est orthogonale au plan (OO'H). Elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan, donc en particulier à (O'H). Comme de plus <u>(O'H) et (BC)</u> se coupent en H, <u>ces droites sont perpendiculaires</u>.

4) a) Démontrer que la sphère de centre O et de rayon OH coupe le plan (ABC) suivant un cercle Γ.

Soit Γ l'intersection de la sphère S de centre O et de rayon OH et du plan (ABC). On veut montrer que Γ est un cercle.

■ Soit $M\in\Gamma$. Par définition de la sphère, $OM=OH$.

Or $OM^2=\overrightarrow{OM}^2=(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M})^2=\overrightarrow{OO'}^2+2\overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{O'M}+\overrightarrow{O'M}^2\overset{(i)}{=}\overrightarrow{OO'}^2+\overrightarrow{O'M}^2$ (1)

(i) $\overrightarrow{O'M}$ est un vecteur du plan (ABC) car O' et M sont des points de ce plan. Le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ est orthogonal au plan (ABC) donc à tout vecteur de (ABC). $\overrightarrow{OO'}$ est donc notamment orthogonal à $\overrightarrow{O'M}$.

On vient de voir que pour n'importe quel point M de (ABC), $\overrightarrow{OO'}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{O'M}$, le triangle OO'M est donc rectangle en O'. Ceci est notamment vrai pour M=H.

(1) peut s'écrire $OM^2=OO'^2+O'M^2$ et, comme $OM=OH$, on obtient $O'M^2=OH^2-OO'^2$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OHO' rectangle en O', on a $OH^2-OO'^2=O'H^2$. La relation devient $O'M^2=O'H^2$ càd $O'M=O'H$. La distance O'H étant constante, les points M du plan (ABC) qui vérifient la relation $O'M=O'H$ sont situés sur un cercle de centre O' passant par H.

On a donc montré que les points de Γ appartiennent à un cercle contenu dans (ABC) de centre O' passant par H. Notons $\mathscr{C}$ ce cercle. On a montré que $\boxed{\Gamma\subset\mathscr{C}}$.

■ Réciproquement, soit $M\in\mathscr{C}$. $OM^2\overset{(i)}{=}OO'^2+O'M^2\overset{(ii)}{=}OO'^2+O'H^2\overset{(iii)}{=}OH^2$.

(i) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMO' rectangle en O'

(ii) $\mathscr{C}$ a pour centre O' et pour rayon O'H donc puisque M appartient à $\mathscr{C}$, on a O'M=O'H.

(iii) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OHO' rectangle en O'.

Finalement, $OM=OH$ donc M appartient à la sphère S de centre O et de rayon OH. Comme M est aussi un point du cercle $\mathscr{C}$ contenu dans (ABC), finalement M appartient à $\mathscr{C}\cap S=\Gamma$. On a montré que $\boxed{\mathscr{C}\subset\Gamma}$.

■ Finalement, comme $\Gamma\subset\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}\subset\Gamma$, on $\boxed{\Gamma=\mathscr{C}}$. Autrement dit, <u>l'intersection de la sphère S de centre O et de rayon OH et du plan (ABC) est le cercle contenu dans (ABC) de centre O' passant par H</u>.

Point méthode :

▪ *Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on peut procéder comme dans cet exemple par* ***double inclusion*** *: On montre que $A\subset B$ et que $B\subset A$ et on en déduit que les ensembles A et B sont égaux.*

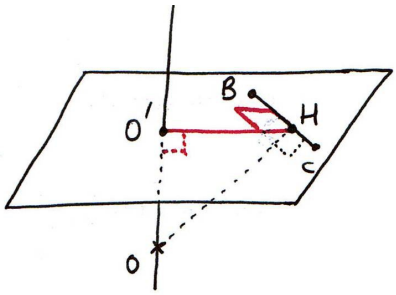
▪ *Pour montrer que $A\subset B$, on montre que tout élément de A appartient à B. La démonstration est de la forme suivante : « Soit $x\in A$, ... bla bla bla ..., donc $x\in B$ » (la façon d'aller de $x\in A$ à $x\in B$ dépend des donnés de l'exercice).*

b) Ce cercle est-il tangent à la droite (BC) ?

Un droite est tangente à un cercle ssi elle passe par un point du cercle et si elle est perpendiculaire au rayon du cercle en ce point.

(BC) passe par H qui appartient au cercle Γ et on a vu que (BC) est perpendiculaire à [O'H], le rayon du cercle Γ en ce point donc $\boxed{(BC)\text{ est tangente à }\Gamma\text{ en H}}$.

Pourquoi ce titre ?
Les trois « perpendiculaires » que mentionne le titre de l'exercice sont les droites (OO'), (O'H) et (BC) qui sont effectivement orthogonales deux à deux (mais (OO') et (BC) ne sont pas perpendiculaires puisqu'elles ne sont pas coplanaires).



83 Les trois perpendiculaires

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(4\,;-2\,;3)$, $B(1\,;-6\,;4)$ et $C(-1\,;0\,;-4)$.

1 a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2 a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).

b. Déterminer les coordonnées du point O', projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3 On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\,\overrightarrow{BC}$.

a. Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$.

b. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

c. Justifier que les droites $(O'H)$ et (BC) sont perpendiculaires.

4 Démontrer que la sphère de centre O et de rayon OH coupe le plan (ABC) suivant un cercle Γ. Ce cercle est-il tangent à la droite (BC) ? *(On ne demande pas de calculer le rayon du cercle Γ.)*

Pistes de résolution

1 a. Il suffit d'établir que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par exemple ne sont pas colinéaires ; montrer une contradiction en supposant la proportionnalité de leurs coordonnées.

b. Un vecteur est normal à un plan dès qu'il est orthogonal à **deux** vecteurs non colinéaires de ce plan.

c. Pour une équation du plan (ABC), on peut utiliser :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0.$$

On vérifie l'exactitude des calculs en testant les coordonnées des points B et C dans l'équation trouvée.

2 a. Toute droite orthogonale au plan (ABC) est dirigée par un vecteur normal à (ABC).

b. Les coordonnées du point O' vérifient à la fois l'équation du plan (ABC) et les équations paramétriques de la droite d.

3 a. Penser à décomposer le vecteur $\overrightarrow{BO}$ lors du calcul du produit scalaire $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}$ pour faire intervenir des produits scalaires connus et le vecteur $\overrightarrow{BH}$ qui peut se remplacer par $t\,\overrightarrow{BC}$.

b. Le contexte des coordonnées permet d'exprimer d'une autre façon les produits scalaires $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC}^2$ et donc de trouver le réel t.

c. On a le choix ici des preuves : soit les coordonnées pour exprimer un produit scalaire adapté au problème, soit réfléchir à la position relative de la droite (BC) et du plan $(OO'H)$.

4 On peut conjecturer que le centre du cercle Γ est le point O'.
Il suffit donc de montrer que la longueur $O'M$ pour tous les points M communs au plan (ABC) et à la sphère est une constante : faire une figure et utiliser les triangles $OO'M$, rectangles en O'.
La question **3 c.** permet de répondre à la dernière interrogation du problème.

Corrigé

83 1 a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\\-7\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Le plan (ABC) a pour équation $x - y - z - 3 = 0$.

2 a. La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$$

b. O' est le point d'intersection de (ABC) et de d, donc, en résolvant le système formé des équations de (ABC) et d, on obtient $O'(1\,;-1\,;-1)$.

3 On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$.

a. $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HO})\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC} = t\|\overrightarrow{BC}\|^2$, car $\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{BH} = 0$; donc $\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$.

b. $\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix}-1\\6\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\6\\-8\end{pmatrix}$; donc on en déduit $t = \dfrac{35}{52}$ et $H\left(\dfrac{1}{36}\,;-\dfrac{51}{36}\,;-\dfrac{18}{13}\right)$.

c. La droite (BC) est perpendiculaire à la droite (OH) et orthogonale à la droite (OO'), donc elle est perpendiculaire au plan $(OO'H)$; donc les droites $(O'H)$ et (BC) sont perpendiculaires.

4 Le triangle $OO'H$ est rectangle en O', donc $OH > OO'$; donc la sphère de centre O et de rayon OH coupe le plan (ABC) suivant un cercle Γ. Ce cercle est tangent à la droite (BC), car $(BC) \perp (O'H)$.

← *Faites un petit dessin qui montre les positions relatives des points, cela aide !*

Partie II (primitives) = Feuille 15 sur WIMS