Dérivées et continuité | T.S.

Exercice 1. [Côté exercices . Réactivation de notions de la classe de Première?] QCM p 90 Déclic

I. Rappels sur les dérivées

A. Les principale idées vues en Première

1. Les dérivées, qu'est-ce que c'est?

● La ***dérivée*** d'une fonction f est une autre fonction notée f'.

Exemple: la dérivée de la fonction $f: x \mapsto x^2$ est la fonction définie par $f'(x) = 2x$.

● Le ***nombre dérivé*** de f en a est $f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, à condition que cette limite existe et soit finie. On définit la fonction dérivée en définissant ainsi sa valeur en chaque point.

2. Les dérivées, à quoi ça sert?

● La dérivée sert surtout à déterminer **le sens de variation des fonctions** (dérivables) :

Propriété 1.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I,
- f est croissante sur I $\Leftrightarrow$ sa dérivée f' est positive sur cet intervalle.
- f est décroissante sur I $\Leftrightarrow$ sa dérivée f' est négative sur cet intervalle.
- f' est *strictement* positive sur I $\Rightarrow$ f est *strictement* croissante sur cet intervalle.
- f' est *strictement* négative sur I $\Rightarrow$ f est *strictement* décroissante sur cet intervalle.

● Corollaire[1] : Les dérivées peuvent servir à montrer qu'une fonction (dérivable) admet un **extremum local**.

Propriété 2. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un point de I
Si f' s'annule en changeant de signe en x_0, alors $f(x_0)$ est un extremum local.

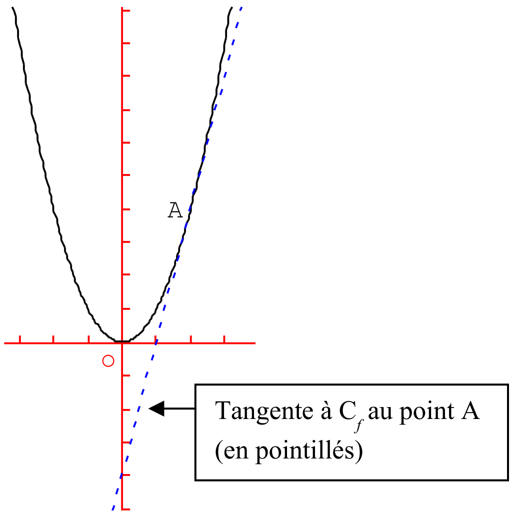
● La dérivée sert aussi à déterminer **l'équation de la tangent à une courbe.**

Si la fonction f est dérivable en a, sa courbe représentative admet une tangente au point d'abscisse a.
Le **coefficient directeur de la tangente** au point (a, *f*(a)) est le nombre dérivé $f'(a)$.

Par exemple, le nombre dérivé de la fonction $f: x \mapsto x^2$ au point d'abscisse 2 est le nombre $f'(2) = 2\times 2$. La tangente à C_f au point A(2, *f*(2)) a donc pour coefficient directeur 4. (voir figure).

Propriété 3. *Si* f est dérivable en a, *alors* l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

Dans notre exemple, la tangente à la courbe au point A(2, 4) a pour équation $y = 4 \times (x - 2) + 4$ càd $y = 4x - 4$ (voir figure).



● Les dérivées servent aussi à déterminer la **vitesse instantanée** d'un mobile connaissant l'expression de sa position en fonction du temps.

[1] Un ***corollaire*** d'une propriété est une conséquence directe de cette propriété.

Si la position d'un mobile sur un axe à un instant t est repérée par son abscisse[2] $s(t)$ alors sa vitesse instantanée à un instant t est la dérivée de sa position. Autrement dit, $v(t) \stackrel{\text{def}}{=} s'(t)$.
Les dérivées servent aussi à calculer l'accélération d'un mobile (qui est la dérivée de la vitesse instantanée), le coût marginal d'un produit (qui est la dérivée du coût)…etc.

3. Les dérivées, comment ça se calcule ?

● En pratique la fonction dérivée s'obtient par des **formules à connaître**. Lorsque la fonction dérivée calculée par ces formules n'est pas définie en un point a, on utilise la définition « $f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, à condition que cette limite existe et soit finie » pour savoir si $f'(a)$ existe.

B. Dérivées des fonction usuelles

fonction f définie par $f(x)=$	dérivée définie par $f'(x)=$	f est définie sur ….	f est dérivable sur ….
k	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n pour càd que n est un entier positif ou négatif et non nul.	nx^{n-1}	- si $n>0$, f est définie sur $\mathbb{R}$ - si $n<0$, f est définie sur $\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0\ ;\infty[$	- si $n>0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ - si $n<0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0\ ;\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0\ ;+\infty[$	$\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0\ ;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+=[0\ ;+\infty[$	$\mathbb{R}^*_+=]0\ ;+\infty[$

♠ Exemple 2. Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^7}$. Comme $\dfrac{1}{x^7}=x^{-7}$, on a $f'(x)=-7x^{-8}=-\dfrac{7}{x^8}$

C. Dérivées et opérations

Propriétés : Soit I un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$.

P4● **Somme** : *Si* les fonctions u et v sont dérivables sur *I*, *alors* la fonction $u+v$ est elle aussi dérivable sur *I* et on a $\boldsymbol{(u+v)'=u'+v'}$.

P5● **Produit** : *Si* les fonctions u et v sont dérivables sur *I*, *alors* la fonction $u+v$ est dérivable sur *I* et on a $\boldsymbol{(u\times v)'=u'v+uv'}$.

P6● **Multiplication par une constante** : λ étant un nombre réel, *si* la fonction u est dérivable sur *I*, *alors* la fonction λu est dérivable sur *I* et on a $\boldsymbol{(\lambda u)'=\lambda u'}$.

P7● **Inverse** : *Si* la fonction v est dérivable sur *I* et si v ne s'annule pas sur *I*, *alors* la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur *I* et on a $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}}$.

P8● **Quotient** : *Si* les fonctions u et v sont dérivables sur *I* et si v ne s'annule pas sur *I*, *alors* la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur *I* et on a $\boldsymbol{\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}}$.

[2] *On prend souvent $s(t)=x(t)$ si l'axe est horizontal et $s(t)=z(t)$ si l'axe est vertical*

II. Quelques formules de plus

Propriété 9. La fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable avec pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ sur tout intervalle sur lequel u est dérivable et strictement positive. On retient $\boldsymbol{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$.

Remarques : Les conditions se retrouvent facilement : Elles garantissent que l'expression $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ existe : Il faut que $u'(x)$ existe d'où « u dérivable », il faut que $\sqrt{u(x)}$ existe d'où « u positive » et on ne peut pas diviser par 0, d'où « u non nulle ». Il en va de même pour toutes les formules de dérivation de ce chapitre.

♠ Exemple 3. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ est -elle dérivable ? Indiquer sa dérivé sur cet/ces intervalle(s).

Propriétés :

P10● *Si* n est un entier positif, la fonction $x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable avec pour dérivée la fonction $x \mapsto n(u(x))^{n-1} u'(x)$ sur tout intervalle sur lequel la fonction u est dérivable. On retient $\boldsymbol{(u^n)' = n u^{n-1} \times u'}$.

P11● *Si* n est un entier négatif, la fonction $x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable avec pour dérivée la fonction $x \mapsto n(u(x))^{n-1} u'(x)$ sur tout intervalle sur lequel la fonction u est dérivable et ne s'annule pas. On retient $\boldsymbol{(u^n)' = n u^{n-1} \times u'}$.

Remarques :

- La formule est la même pour les entiers positifs et négatifs; dans le cas des entiers négatifs, on rajoute juste une condition qui garantit que l'on ne divise pas par zéro.
- Cette formule simplifie bien les calculs quand on a une puissance au dénominateur : Pensez à remplacer $\frac{x+1}{(x-5)^3}$ par $(x+1)(x-5)^{-3}$. Plus généralement, on peut remplacer tous les quotients par des sommes puis utiliser cette formule.

♠ Exemple 4. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f définie par $f(x) = 4(12x - 3x^2 - 7)^3$ est -elle dérivable ? Indiquer sa dérivé sur cet/ces intervalle(s).

♠ Exemple 5. Donner le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = \frac{9}{(12 - 3x^2)^5}$ sur son domaine de définition.

Propriété 12. La fonction $x \mapsto u(ax+b)$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto \underbrace{u'}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{extérieure}}} \underbrace{(ax+b)}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{intérieure}\\ \text{inchangée}}} \times \underbrace{a}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{intérieure}}}$ en tout point x tel que u est dérivable au point $ax+b$. .

Formule unificatrice. Les propriétés 9, 10, 11 et 12 sont touts des cas particulier du théorème suivant :

P 13. Théorème de dérivation d'une fonction composée.
La fonction $x \mapsto f(u(x))$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto \underbrace{f'}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{extérieure}}} (\underbrace{u(x)}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{intérieure}\\ \text{inchangée}}}) \times \underbrace{u'(x)}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{intérieure}}}$ en tout point x tel que u est dérivable en x et f est dérivable au point $u(x)$.

III. Fonctions continues

A. Définition intuitive

Définition 14: Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

● a étant un nombre de l'intervalle I, dire que f est ***continue en a*** signifie que pour obtenir $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$, il suffit de choisir x assez proche de a, ce que l'on note $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

● Une fonction f est ***continue sur un intervalle I*** si elle est continue en tout point de I.

● Intuitivement, on reconnaît qu'une fonction est continue sur un intervalle I au fait que sa courbe représentative peut être tracée sans lever le crayon.

B. Toutes les fonctions usuelles sont continues

Propriétés :

P15● Les fonctions polynômes, inverse, racine carrée, valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.

P16● Les fonctions obtenues par opérations ou composition (càd en appliquant une fonction puis une autre) à partir de fonctions continues sont continues sur leur ensemble de définition.

C. Toutes les fonctions dérivables sont continues

Propriété 17. Une fonction qui est dérivable en un réel a est continue en a.

Démonstration : On a $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)$. *Comme* $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ *et* $\lim_{x \to a} x - a = 0$, *on a* $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$, *donc* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Attention : La réciproque est fausse ! La fonction valeur absolue est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

D. Toutes les fonctions sont continues, alors ? Ben non....

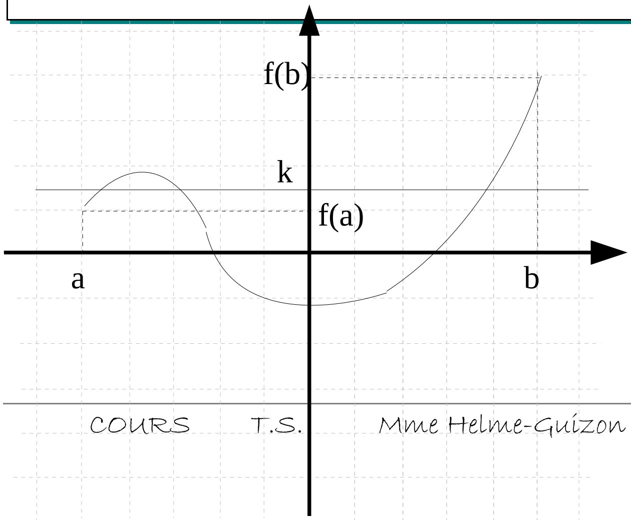
♠ Exemple 6. Un pot de peinture permet de peindre 20 m^2. Soit $f(x)$ le nombre (entier!) de pots de peinture nécessaires pour peindre x m^2. Représentez C_f.

E. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Cas général

P18. Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux réels de I et si k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un réel x compris entre a et b tel que $f(x) = k$.

(ce théorème est provisoirement admis)



Interprétation graphique

Soit C la courbe représentative de la fonction f continue sur $[a ; b]$ et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

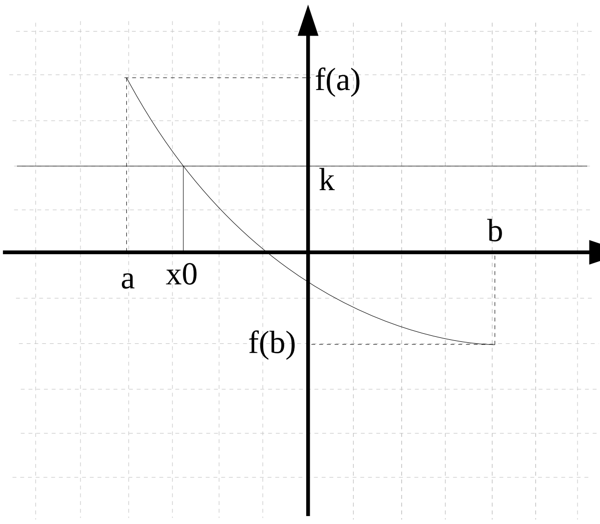
Comme la fonction f est continue, la courbe C traverse la droite D d'équation $y=k$ en au moins un point.

L'équation $f(x) = k$ a donc au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

Attention : cette solution n'est pas forcément unique.

2. Cas des fonctions continues strictement monotones

P19. Théorème de la bijection. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a\ ;\ b]$.



Démonstration

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un réel x_0 tel que $f(x_0)=k$.

Soit x_1 un autre réel de $[a\ ;\ b]$; celui-ci est strictement supérieur ou inférieur à x_0, et comme f est strictement monotone $f(x_1)$ est strictement supérieur ou inférieur à $f(x_0)$, donc à k. $f(x_1)$ ne peut donc pas être égal à k, il n'y a donc pas d'autres solutions de l'équation $f(x) = k$ dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Corollaire 20. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$ *et si* $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas le même signe, *alors* l'équation $f(x)=0$ a une solution unique sur $[a\ ;\ b]$.

♠ Exemple 7. Montrer que l'équation $x^3+x-3=0$ a une solution unique α située entre 1 et 2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+x-3$. Il s'agit d'une fonction continue. D'autre part, on a $g'(x)=3x^2+1$. Comme pour tout réel x on a $g'(x)>0$, la fonction g est strictement croissante (donc monotone) sur $\mathbb{R}$.

Enfin $g(1)=-1$ et $g(2)=7$.

Si $x\leqslant 1$, alors $g(x)\leqslant -1$ et x ne peut pas être solution de $g(x)=0$.

Si $x\geqslant 2$, alors $g(x)\geqslant 7$ et x ne peut pas être solution de $g(x)=0$.

Par contre, comme g est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$, et comme $g(1)$ et $g(2)$ ont des signes opposés, il existe un unique réel α situé entre 1 et 2 tel que $g(x)=0$.

● Algorithme de **dichotomie** pour trouver une valeur approchée des solutions : Ex 3 p 558

Sources : Labomath ; Manuel Repères ; Manuel Hyperbole.

Table des matières

♠ Exercice 1. Activité de remise en route. [Source : A. Reiss-Barde]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x}$.

1) A l'aide de la définition, déterminer le nombre dérivé de f en 1.
2) Justifier la dérivabilité de f puis déterminer avec les formules de cours, la fonction dérivée de la fonction f et vérifier le résultat obtenu à la question 1.
3) Écrire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4) Que peut on dire des tangente à la courbe représentative de f aux points d'abscisses 2 et -2 ?
5) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition et donner son tableau de variations.

♠ Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de dérivabilité et sa dérivée. Vérifiez vos résultats avec un logiciel de calcul formel (TI89 ou Xcas ou sur le site labomath.free.fr/wims/index.html ... etc)

1) $f(x)=\sqrt{2x+x^2}$ **2)** $f(x)=(7+2x-6x^2)^5$ **3)** $f(x)=\dfrac{12}{(3x^2-5x)^7}$

♠ Exercice 3. Même exercice que le précédent avec

1) $f(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^4$ **2)** $f(x)=\dfrac{(-6x^2+24x)^5}{(2x+1)^3}$ **3)** $f(x)=(3x+5)\sqrt{6x^2+7}$

♠ Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3x+4$ et soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Démontrez que dans un repère les courbes de f et g ont une tangente commune.

♠ Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{2x-1}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Démontrez qu'il existe une droite et une seule qui est tangente à $\mathscr{C}$ et qui passe par l'origine du repère.

♠ Exercice 6.

1) Est-il possible de tracer le graphe d'une fonction f telle que $f(-2)=3$, $f(2)=4$ et l'équation $f(x)=\dfrac{13}{4}$ ait exactement une solution ? Si oui, faites-le.
2) Est-il possible de tracer le graphe d'une fonction f telle que $f(-2)=3$, $f(2)=4$ et l'équation $f(x)=\dfrac{13}{4}$ ait exactement deux solutions ? Si oui, faites-le.
3) Est-il possible de tracer le graphe d'une fonction f telle que $f(-2)=3$, $f(2)=4$ et l'équation $f(x)=\dfrac{13}{4}$ n'ait aucune solution ?

♠ Exercice 7. Répondre par "OUI" ou "NON" aux quatre questions suivantes.
Les réponses affirmatives seront justifiées par une démonstration, les autres le seront par un contre-exemple. [Source : G. Costantini]

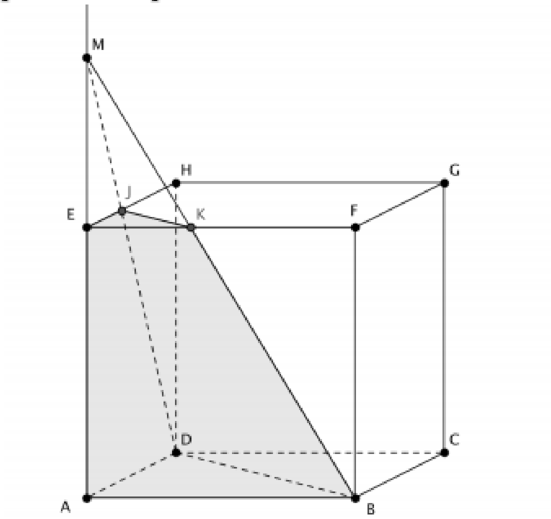
1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est continue en 0, est-elle nécessairement dérivable en 0?
2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en 0, est-elle nécessairement continue en 0?
3) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0)=0$. La fonction f admet-elle nécessairement un extremum en 0?
4) Soit f une fonction continue et dérivable sur [0, 1] et admettant un maximum en 1 sur [0, 1]
La fonction f vérifie-t-elle nécessairement la condition $f'(1)=0$?

♠ Exercice 8. [Source : J. Mugnier]

Dériver les fonctions suivantes après avoir préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de définition : $f : x \mapsto \sqrt{x^4+1}$ $g : x \mapsto (3-7x)^5$ $p : x \mapsto \left(\sqrt{x}+2\right)^{13}$ $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$k : x \mapsto \dfrac{1}{(7-8x)^2}$ $j : x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}\right)^4$ $t : x \mapsto \sqrt{x(5-x)}$ $q : x \mapsto (5x+2)^7(2-11x)^3$

♠ Exercice 9. [Source : J. Mugnier]



ABCDEFGH est un cube de côté 1. M est point de la demi-droite portée par (AE) d'extrémité E. On note EM=x.

1. Montrer que (JK) et (BD) sont parallèles.
2. Démontrer que le volume de la pyramide tronquée BADKEJ est égal à : $V(x)=\dfrac{3x^2+3x+1}{6(x+1)^2}$.
3. Étudier les variations de la fonction V sur $[0;+\infty[$ (on commencera par calculer $V'(x)$). Ce résultat est-il surprenant ?
4. Existe-t-il une valeur de x pour laquelle on a : $V(x)=\dfrac{1}{3}$? Idem avec $V(x)=\dfrac{2}{3}$?
5. Que se passe-t-il lorsque M est très éloigné de E ?

♠ Exercice 10. [Source : J. Mugnier]

L'énergie nécessaire à un poisson pour nager contre un courant de vitesse c dépend de sa propre vitesse v et de la distance d parcourue. Cette énergie est de la forme $\boldsymbol{E(v)=a\dfrac{v^3d}{v-c}}$ où a désigne une contante. Déterminer la valeur de v (qui dépend de c) pour laquelle $\boldsymbol{E(v)}$ est minimale. (c'est effectivement le cas dans la réalité)

Fin du cours, début de mon brouillon

Corrigé des exos du cours

♠ Exemple 11. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f définie par $f(x)=4(12x-3x^2-7)^3$ est -elle dérivable ? Indiquer sa dérivé sur cet/ces intervalle(s).

Avec oooCmathXcas

`f(x):=x^2+3x+1` ce qui donne avec F9

f(x):=x^2+3x+1
On peut taper f(2) ;, f''(x) ou f'(1) puis CTRL F9 et ils sont évalués. Si la définition de f change, toutes les expressions sont recalculées

♠ Exemple 12. Donner le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x)=\frac{9}{(12-3x^2)^5}$ sur son domaine de définition.

B.O. + Julien

Compléments de dérivation 2s

- dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$
- dérivée de $x \mapsto (u(x))^n$
- dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$
- fonction continue sur un intervalle
- théorème des valeurs intermédiaires *
+ corollaire (str ↗)

Calculs de dérivées : compléments	• Calculer les dérivées des fonctions : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$; $x \mapsto (u(x))^n$, n entier relatif non nul ; $x \mapsto e^{u(x)}$; $x \mapsto \ln(u(x))$. • Calculer la dérivée d'une fonction $x \mapsto f(ax+b)$ où f est une fonction dérivable, a et b deux nombres réels.	À partir de ces exemples, on met en évidence une expression unifiée de la dérivée de la fonction $x \mapsto f(u(x))$, mais sa connaissance n'est pas une capacité attendue. Les techniques de calcul sont à travailler mais ne doivent pas être un frein à la résolution de problèmes. On a recours si besoin à un logiciel de calcul formel. (AP) *Exemples de fonctions discontinues, ou à dérivées non continues.*
Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires	• Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone, pour résoudre un problème donné.	On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. On présente quelques exemples de fonctions non continues, en particulier issus de situations concrètes. Le théorème des valeurs intermédiaires est admis. On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. Ce cas particulier est étendu au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. ◇ Des activités algorithmiques sont réalisées dans le cadre de la recherche de solutions de l'équation $f(x)=k$.

P21● *Si* n est un entier positif et si la fonction u est dérivable sur l'intervalle I, *alors* la fonction $x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction $x \mapsto n(u(x))^{n-1}u'(x)$. On retient $\boldsymbol{(u^n)' = nu^{n-1} \times u'}$.

P22● *Si* n est un entier négatif et si la fonction u est dérivable sur l'intervalle I et ne s'annule pas sur I, *alors* la fonction $x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction $x \mapsto n(u(x))^{n-1}u'(x)$. On retient $\boldsymbol{(u^n)' = nu^{n-1} \times u'}$.