Dérivées et continuité | T.S.

♠ Exercice 1. [Côté exercices . Réactivation de notions de la classe de Première?] QCM p 90 Déclic

I. Rappels sur les dérivées

A. Les principale idées vues en Première

1. Les dérivées, qu'est-ce que c'est?

● La ***dérivée*** d'une fonction f est une autre fonction notée f'.

♠ *Exemple: la dérivée de la fonction* $f : x \mapsto x^2$ *est la fonction définie par* $f'(x)=2x$.

Définition 1. Le ***nombre dérivé*** de f en a est le nombre $f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, à condition que cette limite existe et soit finie. On définit la fonction dérivée en définissant ainsi sa valeur en chaque point.

2. Les dérivées, à quoi ça sert?

● La dérivée sert surtout à déterminer **le sens de variation des fonctions** (dérivables) :

Propriété 2. Dérivée et sens de variation
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I,
- f est croissante sur I $\Leftrightarrow$ sa dérivée f' est positive sur cet intervalle.
- f est décroissante sur I $\Leftrightarrow$ sa dérivée f' est négative sur cet intervalle.
- f' est *strictement* positive sur I $\Rightarrow$ f est *strictement* croissante sur cet intervalle.
- f' est *strictement* négative sur I $\Rightarrow$ f est *strictement* décroissante sur cet intervalle.

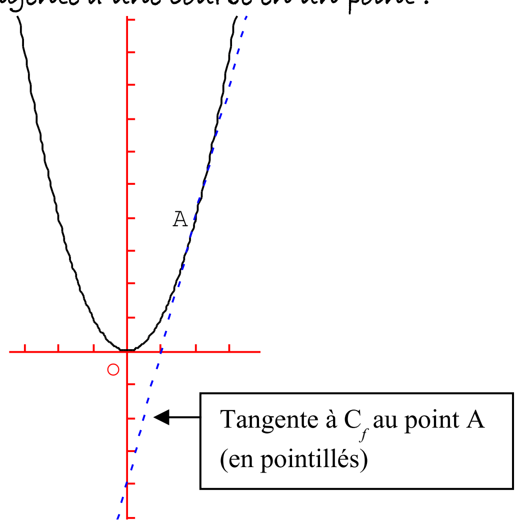
● Corollaire[1] : Les dérivées peuvent servir à montrer qu'une fonction (dérivable) admet un **extremum local**.

Propriété 3. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un point de I
Si f' s'annule en changeant de signe en x_0, alors $f(x_0)$ est un extremum local.

● Les dérivées servent aussi à déterminer **l'équation de la tangente à une courbe en un point**.

Propriété 4. Si la fonction f est dérivable en a, sa courbe représentative admet une tangente au point d'abscisse a. Le **coefficient directeur de la tangente** au point (a, f(a)) est le nombre dérivé $f'(a)$.

♠ *Par exemple, le nombre dérivé de la fonction* $f : x \mapsto x^2$ *au point d'abscisse 2 est le nombre* $f'(2)=2\times 2$. *La tangente à* C_f *au point* $\mathrm{A}(2, f(2))$ *a donc pour coefficient directeur 4. (voir figure).*



Propriété 5. *Si* f est dérivable en a, *alors* l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

♠ *Dans notre exemple, la tangente à la courbe au point A(2, 4) a pour équation* $y=4\times(x-2)+4$ *càd* $y=4x-4$. *(voir figure).*

● Les dérivées servent aussi à déterminer la **vitesse instantanée** d'un mobile connaissant l'expression de sa position en fonction du temps.

[1] Un ***corollaire*** d'une propriété est une conséquence directe de cette propriété.

Si la position d'un mobile sur un axe à un instant t est repérée par son abscisse[2] $s(t)$ alors sa vitesse instantanée à un instant t est la dérivée de sa position. Autrement dit, $v(t)=s'(t)$.
Les dérivées servent aussi à calculer l'accélération d'un mobile (qui est la dérivée de la vitesse instantanée), le coût marginal d'un produit (qui est la dérivée du coût)…etc.

3. Les dérivées, comment ça se calcule ?

● En pratique la fonction dérivée s'obtient par des **formules à connaître**. Lorsque la fonction dérivée calculée par ces formules n'est pas définie en un point a, on utilise la définition « $f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, *à condition que cette limite existe et soit finie* » pour savoir si $f'(a)$ existe.

B. Dérivées des fonction usuelles

fonction f définie par $f(x)=$	dérivée définie par $f'(x)=$	f est définie sur ….	f est dérivable sur ….
k	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n pour $n\in\mathbb{Z}^*$ càd que n est un entier positif ou négatif et non nul.	nx^{n-1}	▪ si $n>0$, f est définie sur $\mathbb{R}$ ▪ si $n<0$, f est définie sur $\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0\ ;\infty[$	▪ si $n>0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ▪ si $n<0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0\ ;\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0\ ;+\infty[$	$\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0\ ;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+=[0\ ;+\infty[$	$\mathbb{R}^*_+=]0\ ;+\infty[$

♠ Exemple 2. *Soit f la fonction définie par* $f(x)=\frac{1}{x^7}$. *Comme* $\frac{1}{x^7}=x^{-7}$, *on a* $f'(x)=-7x^{-8}=-\frac{7}{x^8}$

◯ Remarque 3. Pour toutes les fonctions de ce tableau, les domaines de définition et de dérivabilités sont identiques sauf pour . . .

C. Dérivées et opérations

Propriétés : Soit I un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$.

- **P6. Somme** : *Si* les fonctions u et v sont dérivables sur I, *alors* la fonction $u+v$ est elle aussi dérivable sur I et on a $(u+v)'=u'+v'$.
- **P7. Produit** : *Si* les fonctions u et v sont dérivables sur I, *alors* la fonction $u+v$ est dérivable sur I et on a $(u\times v)'=u'v+uv'$.
- **P8. Multiplication par une constante** : λ [*Lambda*] étant un nombre réel, s*i* la fonction u est dérivable sur I, *alors* la fonction λu est dérivable sur I et on a $(\lambda u)'=\lambda u'$.
- **P9. Inverse** : *Si* la fonction v est dérivable sur I et si v ne s'annule pas sur I, *alors* la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et on a $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$.
- **P10. Quotient** : *Si* les fonctions u et v sont dérivables sur I et si v ne s'annule pas sur I, *alors* la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Corollaires 11. Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et toute fraction rationnelle (=quotient de deux polynômes) est dérivable sur son domaine de définition.

[2] *On prend souvent* $s(t)=x(t)$ *si l'axe est horizontal et* $s(t)=z(t)$ *si l'axe est vertical*

II. Quelques formules de plus

Propriété 12. La fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable avec pour dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ sur tout intervalle sur lequel u est dérivable et strictement positive. On retient $\boldsymbol{(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$.

Remarques : Les conditions se retrouvent facilement : Elles garantissent que l'expression $\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ existe : Il faut que $u'(x)$ existe d'où « u dérivable », il faut que $\sqrt{u(x)}$ existe d'où « u positive » et on ne peut pas diviser par 0, d'où « u non nulle ». Il en va de même pour toutes les formules de dérivation de ce chapitre.

Exemple 4. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{2x^2-162}$ est -elle dérivable ? Indiquer sa dérivé sur cet/ces intervalle(s).

Propriétés :

- **P13.** *Si* n est un entier strictement positif, la fonction $x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable avec pour dérivée la fonction $x \mapsto n(u(x))^{n-1}u'(x)$ sur tout intervalle sur lequel la fonction u est dérivable. On retient $\boldsymbol{(u^n)' = nu^{n-1} \times u'}$.
- **P14.** *Si* n est un entier strictement négatif, la fonction $x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable avec pour dérivée la fonction $x \mapsto n(u(x))^{n-1}u'(x)$ sur tout intervalle sur lequel la fonction u est dérivable et ne s'annule pas. On retient $\boldsymbol{(u^n)' = nu^{n-1} \times u'}$.

Remarques :

- La formule est la même pour tous les entiers non nuls, qu'il soient positifs ou négatifs; dans le cas des entiers négatifs, on rajoute juste une condition qui garantit que l'on ne divise pas par zéro.
- Cette formule simplifie bien les calculs quand on a une puissance au dénominateur : La dérivée est plus facile à calculer si on remplace $\dfrac{x+1}{(x-5)^3}$ par $(x+1)(x-5)^{-3}$. Plus généralement, on peut remplacer tous les quotients par des produits puis utiliser cette formule.
- L'erreur la plus classique est d'oublier le u' dans les formules. Attention !

Exemple 5. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f définie par $f(x)=4(12x-3x^2-7)^3$ est -elle dérivable ? Indiquer sa dérivé sur cet/ces intervalle(s).

Exemple 6. Donner le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{9}{(12-3x^2)^5}$ sur son domaine de définition.

Propriété 15. La fonction $x \mapsto u(ax+b)$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto \underbrace{u'}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{extérieure}}} \underbrace{(ax+b)}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{intérieure}\\ \text{inchangée}}} \times \underbrace{a}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{intérieure}}}$ en tout point x tel que u est dérivable au point $ax+b$. .

Formule unificatrice. Les propriétés 12, Erreur : source de la référence non trouvée, Erreur : source de la référence non trouvée et 15 sont toutes des cas particulier du théorème suivant :

P 16. Théorème de dérivation d'une fonction composée.
La fonction $x \mapsto f(u(x))$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto \underbrace{f'}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{extérieure}}} (\underbrace{u(x)}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{intérieure}\\ \text{inchangée}}}) \times \underbrace{u'(x)}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{intérieure}}}$ en tout point x tel que u est dérivable en x et f est dérivable au point $u(x)$.

III. Fonctions continues

A. Définition intuitive

Définition 17: Soit f une fonction définie sur un intervalle I

▪ a étant un nombre de l'intervalle I , dire que f est ***continue en a*** signifie que pour obtenir $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$, il suffit de choisir x assez proche de a , ce que l'on note $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

▪ Une fonction *f* est ***continue sur un intervalle I*** si elle est continue en tout point de *I*.

▪ Intuitivement, on reconnaît qu'une fonction est continue sur un intervalle I au fait que sa courbe représentative peut être tracée sans lever le crayon.

B. Toutes les fonctions usuelles sont continues

Propriétés :

▪ **P18.** Les fonctions polynômes, inverse, racine carrée et valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.

▪ **P19.** Les fonctions obtenues par opérations ou composition (càd en appliquant une fonction puis une autre) à partir de fonctions continues sont continues sur leur ensemble de définition.

C. Toutes les fonctions dérivables sont continues

Propriété 20. Une fonction qui est dérivable en un réel *a* est continue en *a*.

Attention : La réciproque est fausse ! La fonction valeur absolue est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

D. Toutes les fonctions sont continues, alors ? Ben non....

Exemple 7. Un pot de peinture permet de peindre 20 m^2 . Soit $f(x)$ le nombre (entier!) de pots de peinture à acheter pour peindre x m^2 . Représentez C_f .

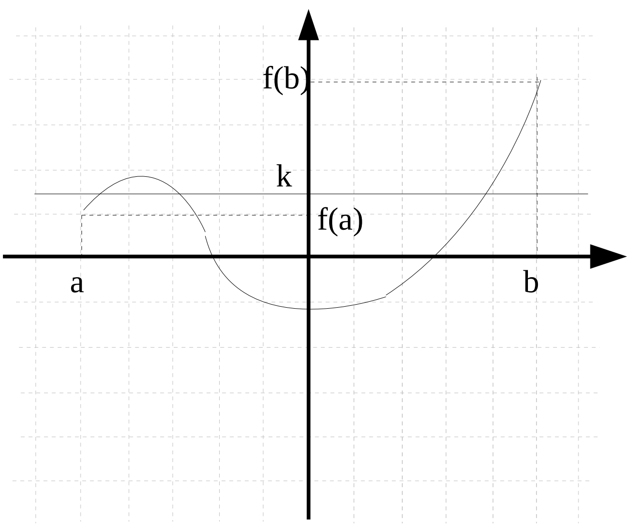
E. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Cas général

P21. Théorème des valeurs intermédiaires (TVI pour les intimes): Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*. Si *a* et *b* sont deux réels de *I* et si *k* est un réel compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), alors il existe au moins un réel *x* compris entre *a* et *b* tel que *f*(*x*) = *k*.

(ce théorème est admis)

Interprétation graphique



Soit *C* la courbe représentative de la fonction *f* continue sur [*a* ; *b*] et soit *k* un réel compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*).

Comme la fonction *f* est continue, la courbe *C* traverse la droite *D* d'équation *y*=*k* en au moins un point.

L'équation *f*(*x*) = *k* a donc au moins une solution dans l'intervalle [*a* ; *b*].

Attention : cette solution n'est pas forcément unique.

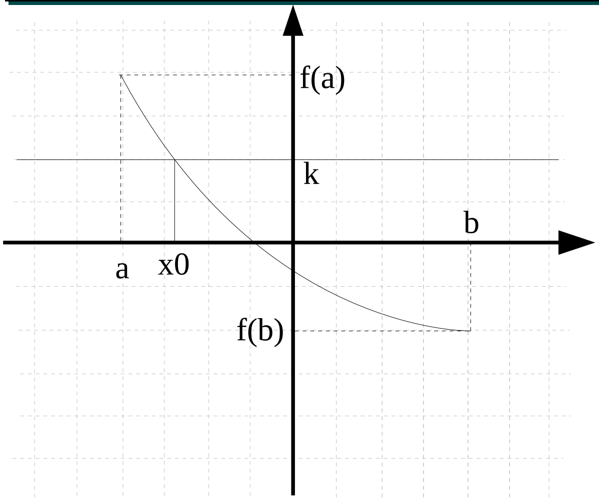
2. Cas des fonctions continues strictement monotones

Définition 22:

▪ On dit qu'une fonction f est ***monotone*** sur un intervalle I ssi elle est soit croissante sur I soit décroissante sur I.

▪ On dit qu'une fonction f est ***strictement monotone*** sur un intervalle I ssi elle est soit strictement croissante sur I soit strictement décroissante sur I.

P23. Corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires (Anciennement appelé **Théorème de la bijection).** Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a ; b]$.



Démonstration

▫ *Existence d'une solution : D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un réel x_0 tel que $f(x_0)=k$.*

▫ *Prouvons maintenant l'unicité de la solution : Soit x_1 un autre réel de $[a ; b]$; celui-ci est strictement supérieur ou inférieur à x_0, et comme f est strictement monotone $f(x_1)$ est strictement supérieur ou inférieur à $f(x_0)$, donc à k. $f(x_1)$ ne peut donc pas être égal à k, il n'y a donc pas d'autres solutions de l'équation $f(x) = k$ dans l'intervalle $[a ; b]$.*

Convention : Une flèche oblique dans un tableau de variations indique la continuité et la stricte monotonie de la fonction considérée. *(càd exactement les conditions nécessaires pour appliquer le théorème ci-dessus).*

Corollaire 24. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$ *et si* $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas le même signe, *alors* l'équation $f(x)=0$ a une solution unique sur $[a ; b]$.

♠ Exemple 8. Montrer que l'équation $x^3+x-3=0$ a une solution unique α située entre 1 et 2.

Solution : *Soit g la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x)=x^3+x-3$. *g est un polynôme, or tous les polynômes sont continus donc g est une fonction continue. D'autre part, on a* $g'(x)=3x^2+1$. *Comme pour tout réel x on a* $g'(x)>0$, *la fonction g est strictement croissante (donc monotone) sur* $\mathbb{R}$.

Enfin $g(1)=-1$ *et* $g(2)=7$.

Si $x\leqslant 1$, *alors* $g(x)\leqslant -1$ *et x ne peut pas être solution de* $g(x)=0$.

Si $x\geqslant 2$, *alors* $g(x)\geqslant 7$ *et x ne peut pas être solution de* $g(x)=0$.

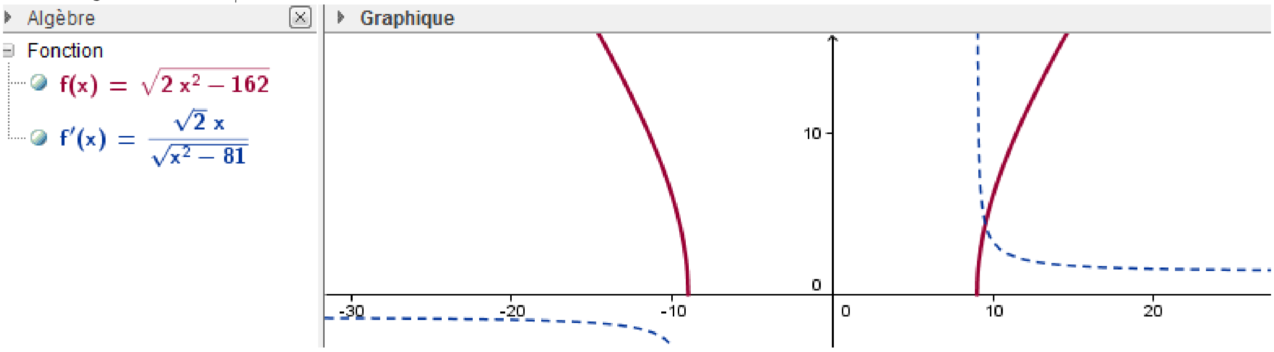
Par contre, comme g est continue et strictement croissante sur [1; 2], et comme g(1) et g(2) ont des signes opposés, il existe un unique réel α *situé entre 1 et 2 tel que g(x)=0.*

Algorithme de **dichotomie** pour trouver une valeur approchée des solutions : Ex 3 p 558

Sources : Labomath ; Manuel Repères ; Manuel Hyperbole.

Table des matières

♠ Corrigé de l'exemple 4.



♠ Corrigé de l'exemple 4.