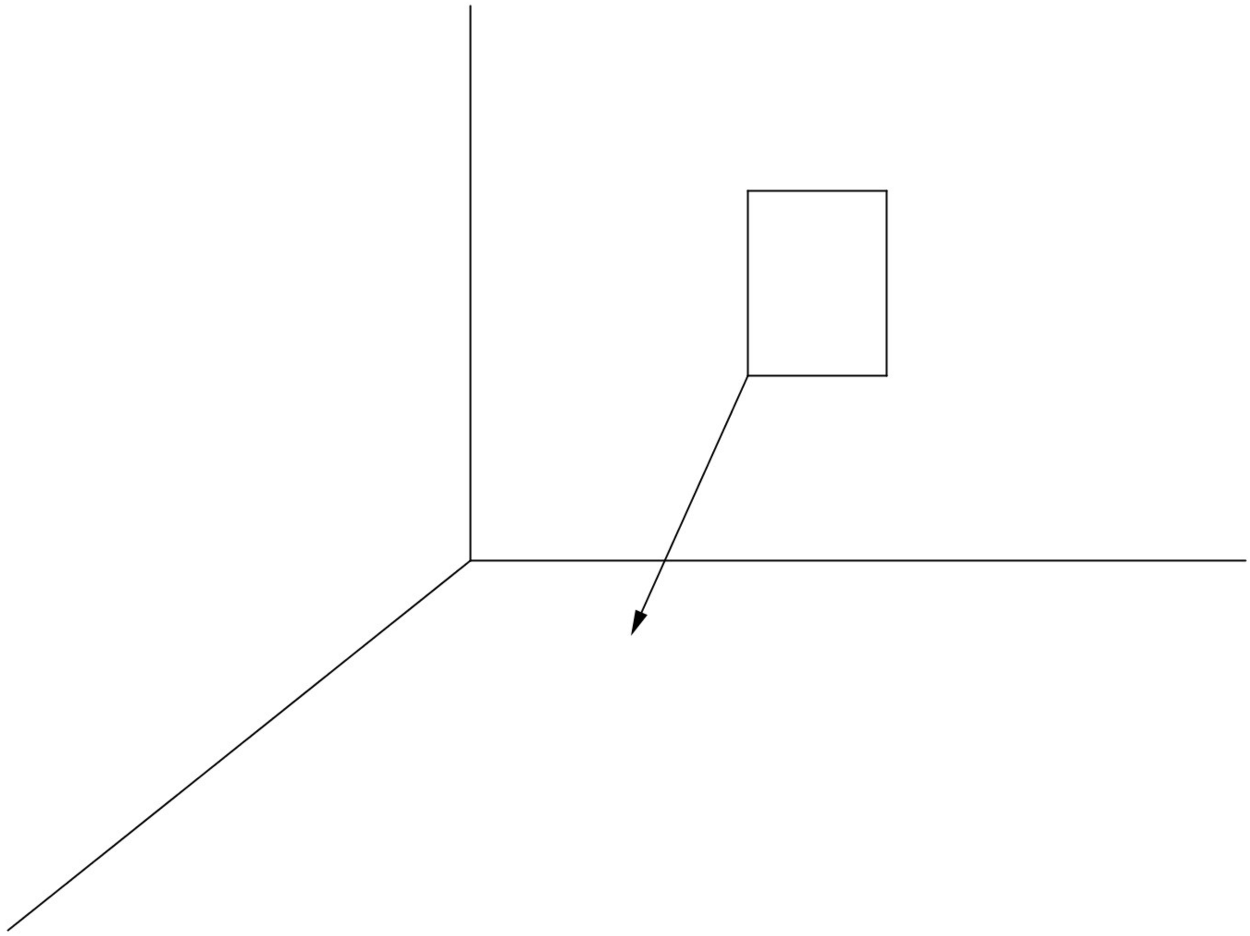
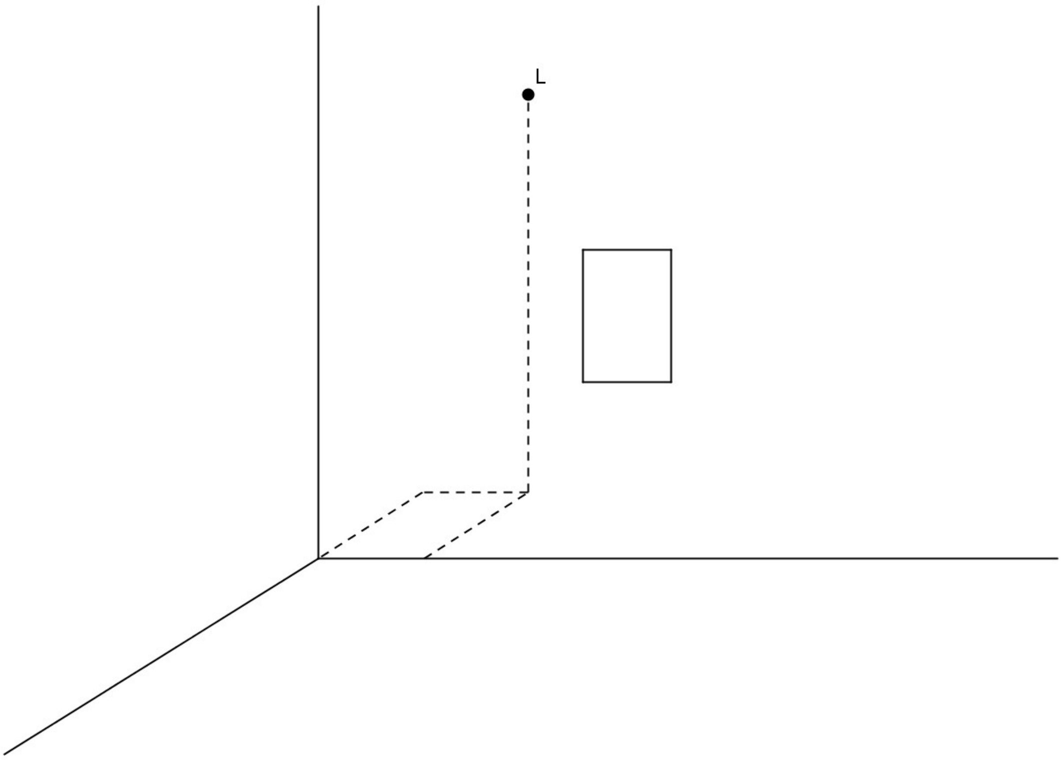
♠ Exercice 1. Mise en route via une tâche complexe

1) Dans la pièce représentée ci-dessous, la lumière du soleil rentre par la fenêtre et dessine une tache de lumière sur le sol (non représentée). La direction de la lumière du soleil a été indiquée en représentant sur le dessin un rayon de soleil parallèle au mur de gauche. Dessinez la tache de lumière sur le sol.



2) *Pour aller plus loin* : Il fait maintenant nuit et c'est la lumière d'un réverbère qui rentre par la fenêtre et dessine une tache de lumière sur le sol (non représentée). La position du réverbère par rapport à la maison a été indiquée par des traits en pointillés parallèles aux murs de la maison et la lampe elle-même est représentée par le point L. Les traits qui semblent parallèles sur la figure sont donc réellement parallèles.
Dessinez la tache de lumière sur le sol.



Droites et plans de l'espace — T.S.

<u>Remarque</u> : Les vecteurs de l'espace, la géométrie analytique dans l'espace, les représentations paramétriques seront traitées ultérieurement.

Introduction : *Géométrie dans l'espace et Géométrie dans le plan*
Tous les théorèmes de géométrie plane (droite des milieux, propriétés des parallélogrammes, « deux droites d'un plan sont soit sécantes soit parallèles », etc…) sont valables dans n'importe quel plan de l'espace. En pratique, résoudre un problème de géométrie dans l'espace revient très souvent à regarder ce qui se passe dans un plan donné.

I. Positions relatives des droites et plans de l'espace

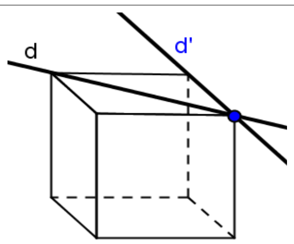
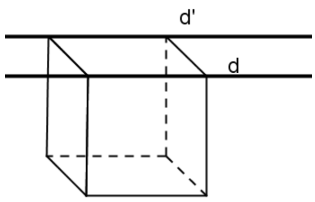
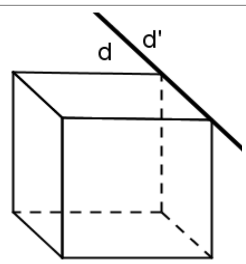
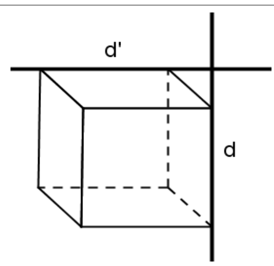
Propriété 1: Dans l'espace,
- Une droite peut être définie par deux points distincts, *ou* par un point et un vecteur directeur.
- Un plan peut être défini par trois points non alignés, *ou* par deux droites sécantes, *ou* par deux droites parallèles, *ou* par un point et deux vecteurs non colinéaires.

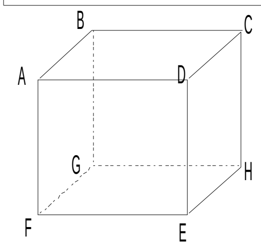
Définition 2: ***coplanaires*** signifie « contenu(e)s dans un même plan. »

A. Position relative de deux droites de l'espace

Propriétés : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires (évidemment!)
P3● Deux droites <u>coplanaires</u> sont *soit* sécantes (en un point) *soit* parallèles (au sens large) *(on retrouve la géométrie du plan)*.
P4● Deux droites <u>non coplanaires</u> ne sont ni sécantes, ni parallèles.

<u>Remarque</u> : ***parallèles au sens large*** signifie « soit strictement parallèles soit confondu(e)s ».

Coplanaires (=dans un même plan)			Non coplanaires
d et d' sécantes	d et d' parallèles		(ni sécantes, ni parallèles)
 d et d' ont un unique point d'intersection.	 d et d' strictement parallèles	 d et d' confondues	 d et d' ne sont contenues dans aucun plan



♠ <u>Exemple 2.</u>
Dans le cube ABCDEFGH dessiné ci-contre :
1) les droites (AB) et (CD) sont . . . .
2) les droites (AE) et (DF) sont . . . .
3) les droites (AD) et (CH) sont . . . .

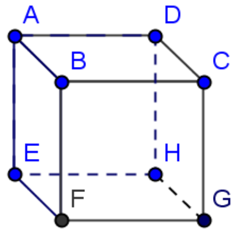
<u>Pratique</u> : Pour montrer que deux droites sont sécantes, on cherche un plan les contenant. Dans ce plan, il suffit de montrer que ces droites ne sont pas parallèles. ←

C'est une méthode générale : Résoudre un problème de géométrie dans l'espace revient très souvent à regarder ce qui se passe dans un plan donné.

B. Position relative de deux plans

Propriété 5: Deux plans sont *soit* sécants (suivant une droite) *soit* parallèles (au sens large).

Rappel : Des plans parallèles (au sens large) peuvent être soit strictement parallèles soit confondus.



♠ Exemple 3.
Dans le cube ABCDEFGH dessiné ci-contre :

1) les plans (ABC) et (EFG) sont . . . .

2) les plans (ABC) et (CHE) sont . . . .

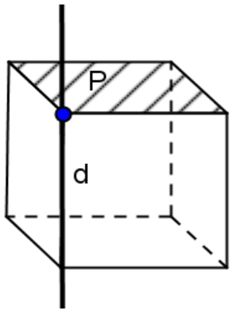
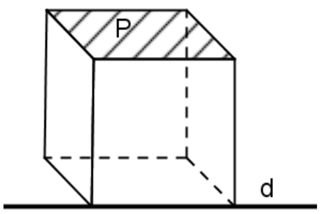
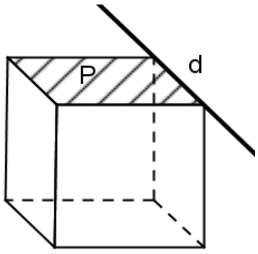
C. Position relative d'une droite et d'un plan

Propriétés :

P6● Une droite qui a deux points communs avec un plan est contenue dans ce plan.

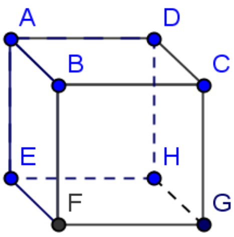
P7● Une droite qui passe par un point d'un plan P et qui est parallèle à une droite de P est contenue dans P.

P8● Un plan et une droite sont *soit* sécants (en un point) *soit* parallèles (au sens large).

Le plan et la droite sont **sécants**	Le plan et la droite sont **parallèles**	
 Le plan et la droite ont un unique point d'intersection.	 Le plan et la droite sont **strictement parallèles** : Ils n'ont aucun point d'intersection.	 La droite est contenue dans le plan.

♠ Exercice 4. *Au moyen du cube ABCDEFGH dessiné ci-contre, illustrez le résultat suivant :*

Attention : Si une droite est parallèle à un plan, on ne peut pas en déduire qu'elle est parallèle à toutes les droites du plan.



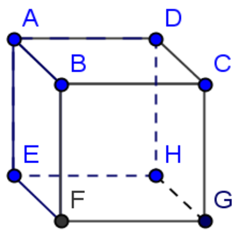
II. Parallélisme dans l'espace

A. Droite parallèle à un plan

Propriété 9 : Une droite est parallèle à un plan ssi[1] elle est parallèle à une droite de ce plan.

[1] ssi = si et seulement si, indique que les propositions sont équivalentes.

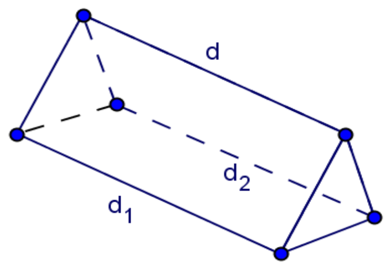
♠ Exemple 5. Montrez que la droite (AC) est parallèle au plan (EFG).



Réponse :La droite (AC) est parallèle à la droite (EG) incluse dans le plan (EFG), elle est donc parallèle au plan (EFG).

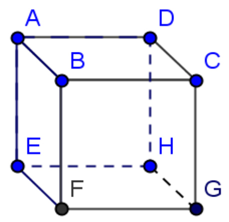
B. Théorème du toit

Propriété 10 : Théorème du toit. Si d_1 et d_2 sont deux droites strictement parallèles alors l'intersection de deux plans contenant respectivement d_1 et d_2 est une droite d parallèle à d_1 et d_2.



d_1 et d_2 sont les « gouttières » et d est « le fait (le haut) » du « toit ».

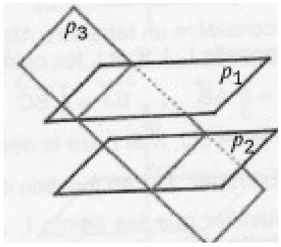
♠ Exercice 6. *Soit ABCDEFGH le cube dessiné ci-contre. Soit I un point n'appartenant pas au plan (FGH). Soit Δ la droite d'intersection des plans (FGI) et (EHI). Montrer que Δ est parallèle à la droite (FG).*



Réponse : Comme les droites (FG) et (EH) sont parallèles et contenues respectivement dans les plans (FGI) et (EHI), par le théorème du toit, la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à la droite (FG).

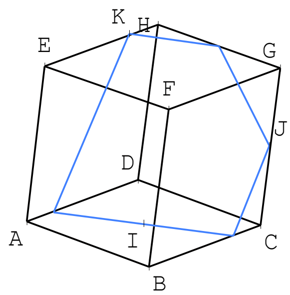
C. Plan sécant à deux plans parallèles

P 11 : Théorème d'incidence. Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



♠ Exemple 7.

Dans le cube ABCDEFGH dessiné ci-contre, I est un point du plan ABC.
Le plan (IJK) coupe les plans parallèles (EFG) et (ABC) suivant des droites parallèles.
Le plan (IJK) coupe les plans parallèles (ADE) et (BCG) suivant des droites parallèles.

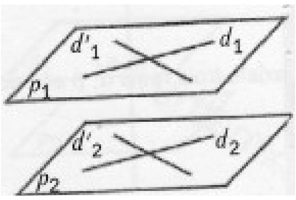


→ Résultat très utile pour construire les sections d'un cube (ou plus généralement d'un pavé droit) par un plan!

D. Quelques méthodes classiques

- Pour construire le point d'intersection de deux droites, **on se place dans un plan**.

- Pour montrer que **deux plans sont parallèles** :
  - on peut raisonner par l'absurde (« supposons qu'ils soient sécants »….. et aboutir à une contradiction.)
  - il suffit de montrer qu'ils sont perpendiculaires à une même droite (voir plus loin le paragraphe sur l'orthogonalité).
  - il suffit de montrer que l'un contient deux droites sécantes qui sont parallèles à deux droites de l'autre.



● Pour **construire la droite d'intersection de deux plans sécants P_1 et P_2**, il suffit (!) de construire deux points de cette droite. Si on connaît deux droites contenues respectivement dans P_1 et P_2 qui sont sécantes, cela nous fournira un tel point d'intersection. Comment trouver une telle paire de droites ? De telles droites apparaissent par exemple comme intersection de P_1 et de P_2 avec un autre plan. En supposant que les intersections de P_1 et P_2 avec ce troisième plan sont faciles à construire, cela nous donne la solution.

● Plus généralement, **introduire un plan annexe** peut aider à construire des intersections. Par exemple, si on veut construire l'intersection d'un tétraèdre ou d'un pavé avec le plan (IJK), il se peut qu'en utilisant le plan (AIJ) ou (BIJ) on puisse construire l'intersection de la droite (IJ) avec une des faces.

III. Orthogonalité dans l'espace

A. Droites orthogonales

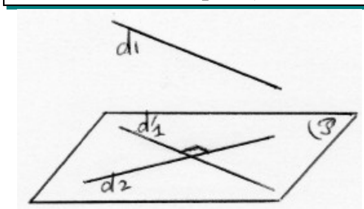
Intuitivement : Pour savoir si deux droites de l'espace sont orthogonales, on déplace une des droites (ou les deux) parallèlement à elle-même. On obtient ainsi deux droites sécantes (et donc coplanaires) et on regarde si ces droites sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent.

Remarque : On ne parle de droites perpendiculaires que dans le cas de droites sécantes (donc coplanaires).

Définition 12:

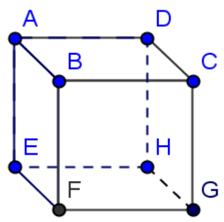
● Deux droites sont ***perpendiculaires*** si elles sont coplanaires et forment un angle droit.

● Deux droites sont ***orthogonales*** si l'une est parallèle à une droite perpendiculaire à l'autre *(On se ramène dans un plan)*



♠ Exemple 8.

1) (d'_1) et (d_2) sont perpendiculaires.
2) (d_1) et (d_2) sont orthogonales mais pas perpendiculaires car elles ne sont pas coplanaires.

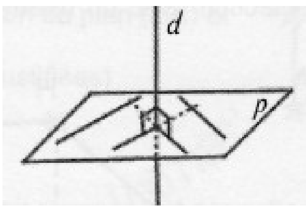


♠ Exemple 9. Montrer que les droites (AB) et (CG) sont orthogonales.

Réponse : Les droites (AB) et (CG) sont orthogonales car (AB) est parallèle à (CD) qui est perpendiculaire à (CG).

B. Droite orthogonale à un plan

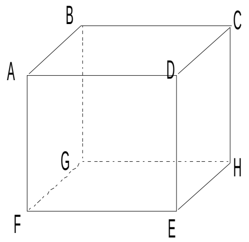
Définition 13: Une droite est ***orthogonale à un plan*** si elle est orthogonale à <u>toutes</u> les droites du plan.



→ Pratique: Pour montrer que deux droites sont orthogonales, il est parfois commode de démontrer que l'une est contenue dans un plan orthogonal à l'autre.

Théorème 14 : Théorème de la porte. Si une droite est orthogonale à <u>deux</u> droites sécantes d'un plan, elle est orthogonale à ce plan.

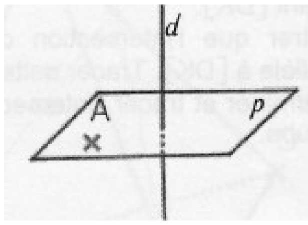
→ Propriété très utile pour montrer qu'une droite est orthogonale à un plan.



♠ Exercice 10. *Montrer que les droites (AF) et (AC) sont orthogonales.*

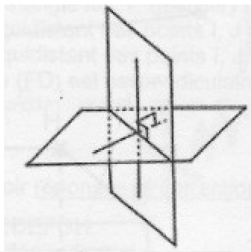
Réponse : La droite (AF) est orthogonale aux droites (AB) et (AD) sécantes dans le plan (ABC), elle est donc orthogonale au plan (ABC). Puisque (AF) est orthogonale au plan (ABC), elle est orthogonale à la droite (AC) incluse dans le plan (ABC).

Propriété 15: Par un point A de l'espace il passe un unique plan P perpendiculaire à une droite *d* donnée.
Le point H d'intersection de *d* et du plan P est appelé le ***projeté orthogonal de A sur le plan P.***

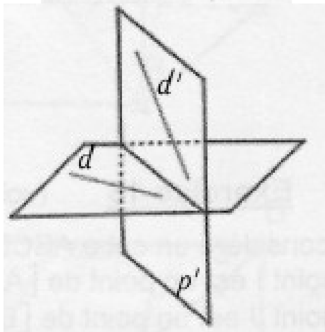


C. Plans orthogonaux

Définition 16: Deux plans sont ***orthogonaux*** ssi l'un contient une droite orthogonale à l'autre.



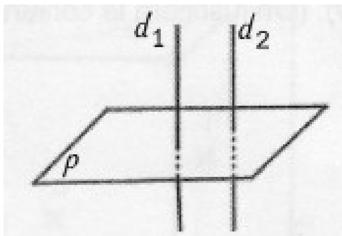
Attention : Si deux plans sont orthogonaux, on ne peut pas en déduire que toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre.



D. Parallélisme et orthogonalité

Propriétés :
P17. Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

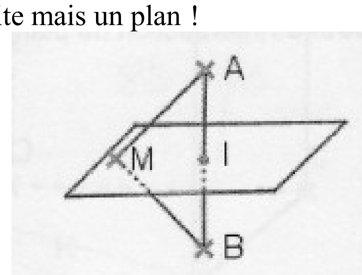
P18. Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



E. Plan médiateur d'un segment

Dans le plan, l'ensemble des points équidistants de deux points A et B est une droite, la médiatrice du segment [AB]. On étend maintenant cette notion à l'espace....Ce n'est plus une droite mais un plan !

Définition 19: Dans l'espace, l'ensemble des points équidistants de deux points A et B est un plan appelé ***plan médiateur du segment [AB].***



Propriété 20: Le plan médiateur du segment [AB] est le plan orthogonal à la droite (AB) qui passe par le milieu du segment [AB].

Table des matières

♠ Exercice 11.

Fin du cours, début de mon brouillon

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Droites et plans		
Positions relatives de droites et de plans : intersection et parallélisme.	• Étudier les positions relatives de droites et de plans.	Le cube est une figure de référence pour la représentation des positions relatives de droites et de plans.
Orthogonalité : - de deux droites ; - d'une droite et d'un plan.	• Établir l'orthogonalité d'une droite et d'un plan.	On étudie quelques exemples de sections planes du cube. Ce travail est facilité par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.