D.S. n°1 : Configurations du plan, milieux, distances — 2nde 5

<u>Calculatrices autorisées</u>, 55 min. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± – Technique : + ± – Raisonnement : + ± –	Signature des parents : *Vu*	Note : $\overline{}$ **20**

▪ Ce contrôle vise à tester les connaissances mais aussi les méthodes de travail :

- L'un des exercices ci-dessous figurait dans le DS de l'an dernier que je vous avais suggéré de travailler.
- vous avez déjà fait l'autre exercice en DM et un corrigé vous a été donné. Pour ceux qui avaient eu des difficultés, on en a parlé en classe et si dans l'intervalle vous avez étudié le corrigé et fait une **restitution** pour vérifier que vous savez bien refaire l'exercice, le refaire en DS ne devrait pas poser de problèmes. En général, lire le corrigé ne suffit pas.

▪ RAPPELS SUR LA FRAUDE AUX EXAMENS : Aucun échange de matériel ou d'informations n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.

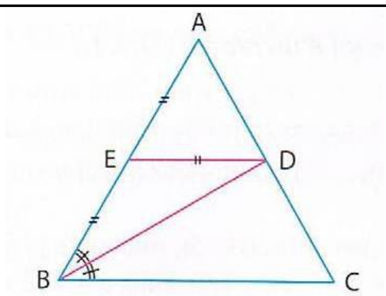
En cas de similitudes dans les copies, les <u>deux élèves</u> concernés auront zéro : Laisser copier un camarade, c'est encourager la triche et accepter de pénaliser ceux qui ne trichent pas.

▪ Il faut toujours prouver vos affirmations (sauf mention contraire de l'énoncé) et, lorsque vous justifiez vos réponses, la propriété employée doit apparaître clairement.

Un corrigé sera disponible à *<u>http://mathematoques.weebly.com</u>*

/ 6,5 — Exercice 1. *Fait en devoir à la maison.*

E est le milieu de [AB], D appartient à [AC].



/0,5 **1)** Quelle conjecture peut-on faire sur la position du point D sur [AC] ?

/2 **2) a)** Démontrez que $\widehat{EDB} = \widehat{DBC}$.

/4 **b)** Démontrez votre conjecture sur D.

/ 13,5 — Exercice 2. *Faisait partie de la liste des exercices suggérés pour s'entraîner.*

Dans le repère orthonormé (O, I, J), les points V, E, R et T ont pour coordonnées $V(-3;1)$, $E(3;3)$, $R(4;0)$ et $T(-2;-2)$.

/2 **1)** Faire une figure et la compléter au fur et à mesure que de nouveaux éléments apparaissent.

/1 **2)** Déterminer <u>par le calcul</u> les coordonnées du milieu G de [VE] .

/2 **3)** Calculer la distance VT et la distance VE.

/2,5 **4)** Quelle est la nature du triangle TGV ? *Soyez aussi précis(e) que possible*

/2 **5)** Le quadrilatère VERT est-il un parallélogramme ? *Si oui, prouvez-le, et si non, prouvez que ce n'en est pas un.*

/2,5 **6) a)** Le quadrilatère VERT est-il un losange ? *Même consigne.*

b) Le quadrilatère VERT est-il un rectangle? *Même consigne.*

/1,5 **7)** Tracer le demi-cercle de diamètre [VE] situé à l'extérieur de VERT. La droite (TG) coupe ce demi-cercle en A. Quelle est la nature du triangle EVA ?

/1 **8)** *Bonus* : Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AGE}$.

Corrigé

Exercice 1.

1) D <u>semble</u> être le milieu de [AC]. [On dit « semble » car à ce stade, on n'a rien prouvé ; ce n'est qu'une conjecture.]

2) Prouvons que D est le milieu de [AC] :

a) On montre que les angles correspondants $\widehat{EDB}$ et $\widehat{DBC}$ sont égaux.

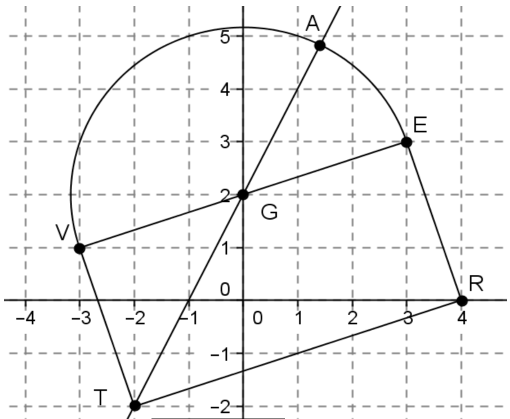
- D'après les codages, $ED=EB$ donc le triangle BED est isocèle en E. Ses angles à la base sont donc égaux, ce qui s'écrit $\widehat{EDB}=\widehat{EBD}$ (1). [P51 du formulaire]
- Par ailleurs, les codages indiquent que $\widehat{EBD}=\widehat{DBC}$ (2).
- Finalement, avec (1) et (2), on a $\widehat{EDB}=\widehat{DBC}$.

b) On en déduit que les droite (ED) et (BC) sont parallèles puis que D est le milieu de [AC]

- $\widehat{EDB}=\widehat{DBC}$ donc les droites (ED) et (BC) sont coupées par la sécante (BD) en formant des angles alternes-internes égaux, (ED) et (BC) sont donc parallèles. [P85 du formulaire]
- La droite (ED) passe par le milieu E du côté du triangle ABC et elle est parallèle au côté (BC), donc elle coupe le troisième côté de ABC en son milieu [P74 du formulaire], ce qui prouve que <u>D est bien le milieu de [AC]</u>.

Exercice 2.

Dans le repère orthonormé (O, I, J), les points V, E, R et T ont pour coordonnées $V(-3;1), E(3;3), R(4;0)$ et $T(-2;-2)$.



1) **Figure** : Voir ci-contre.

2) **Coordonnées du milieu G de [VE]** :

$x_G=\frac{x_V+x_E}{2}=\frac{-3+3}{2}=0$ et $y_G=\frac{y_V+y_E}{2}=\frac{1+3}{2}=2$.

$\boxed{G(0;2)}$

3) **Calculer la distance VT et la distance VE**:

$VT=\sqrt{(x_V-x_T)^2+(y_V-y_T)^2}=\sqrt{(-3+2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{1+9}$ $\boxed{VT=\sqrt{10}}$

$VE=\sqrt{(x_V-x_E)^2+(y_V-y_E)^2}=\sqrt{(-3-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{36+4}$ $\boxed{VE=\sqrt{40}=2\sqrt{10}}$

Dans -1^2, seul le 1 est au carré alors que dans $(-1)^2$, c'est -1 qui est au carré donc $-1^2=-1\times 1=-1\neq(-1)^2=(-1)\times(-1)=1$. Les parenthèses changent tout !

4) **Nature du triangle TGV**:

▪ G est le milieu de [VE] donc $\text{VG}=\frac{1}{2}\text{VE}=\frac{1}{2}\sqrt{10}=\sqrt{10}$. Comme on a aussi $\text{VT}=\sqrt{10}$, le triangle VGE est <u>isocèle en </u>V.

▪ On va <u>montrer que le triangle</u> VGE est rectangle au moyen de la réciproque du théorème de Pythagore.

$TG=\sqrt{(0+2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

D'une part $\text{VT}^2+\text{VG}^2=10+10=20$. D'autre part, $\text{GT}^2=20$. Comme $10+10=20$, on a donc $\text{VT}^2+\text{VG}^2=\text{GT}^2$ donc par la réciproque du théorème de Pythagore, TGV est <u>rectangle en V</u>.

▪ Finalement, <u>TGV est rectangle isocèle en V</u>.

5) **Le quadrilatère VERT est-il un parallélogramme** ? *Si oui, prouvez-le, et si non, prouvez que ce n'en est pas un.*

Soit I le milieu de [VR] et J celui de [ET]. Calculons leurs coordonnées:

$x_I = \frac{x_V + x_R}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$, $y_I = \frac{y_V + y_R}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$, $x_J = \frac{x_E + x_T}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_J = \frac{y_E + y_T}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

I et J ont tous deux pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, donc $I = J$, ce qui signifie que les diagonales de VERT se coupent en leur milieu. Or si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme. On en déduit que <u>VERT est un parallélogramme</u>.

6) a) Le quadrilatère VERT est-il un losange ?

<u>Si</u> VERT était un losange tous ses côtés auraient la même longueur, or $\mathrm{VT} = \sqrt{10}$ et $\mathrm{VE} = 2\sqrt{10} \neq \sqrt{10}$ donc VERT ne peut pas être un losange. [Ceci est un raisonnement par l'absurde : Pour montrer que quelque chose est faux on montre que si c'était vrai on aboutirait à une contradiction].

b) Le quadrilatère VERT est-il un rectangle?

Or on a déjà vu à la question 3) que l'angle $\widehat{\mathrm{TVE}}$ est droit. VERT est donc un <u>parallélogramme</u> qui a (au moins) <u>un angle droit</u>, c'est donc un <u>rectangle</u>.

7) Nature du triangle EVA. [avec une rédaction qui décompose le raisonnement. Rédiger ainsi est un peu plus long mais met bien en valeur la façon de faire le raisonnement.]

<u>Données</u> : Le côté [EV] du triangle EVA est un diamètre de son cercle circonscrit.

<u>Propriété</u> : Or si l'un des côtés d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle et le diamètre du cercle circonscrit est son hypoténuse.

<u>Conclusion</u> : EVA est rectangle en A.

8) Mesure de l'angle $\widehat{AGE}$:

▪ TGV est rectangle isocèle donc ses angles à la base mesurent 45°. En particulier, $\widehat{TGV} = 45^\circ$

▪ Les angles $\widehat{\mathrm{AGE}}$ et $\widehat{\mathrm{TGV}}$ sont opposés par le sommet, ils ont donc la même mesure, d'où $\widehat{AGE} = \widehat{TGV}$.

▪ En combinant ces deux résultats, on obtient $\widehat{AGE} = 45^\circ$