D.S. n°1 : Espace, Continuité et Dérivées — TS1

Jeudi 27 septembre 2012, 4 exercices (**TSVP**), 2h, **Calculatrices autorisées**

Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : – ± + Technique : – ± + Raisonnement : – ± +	Note : $\frac{\quad}{40} = \frac{\quad}{20}$

/9

Exercice 1.

Soit f la fonction définie par $f(x)=(7+4x)\sqrt{3-12x}$.

/6 **1)** Calculer sa dérivée après avoir précisé son ensemble de définition et son ensemble de dérivabilité puis déterminer ses variations. Présentez vos résultats dans un tableau de variations dans lequel figureront les valeurs aux bornes (finies) de son domaine de définition et aux extrema éventuels.

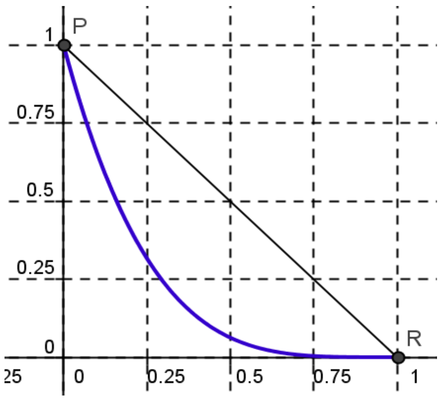
/3 **2)** Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-15$.

/12,5

Exercice 2.

On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=(1-x)^4$ et les points $P(0;1)$ et $R(1;0)$.

L'objectif de cet exercice et de trouver une tangente à $\mathscr{C}$ parallèle à (PR) si une telle tangente existe.



1) Étude d'une fonction auxiliaire. Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x)=(1-x)^3$.

/1,5 **a)** Montrer que g est strictement monotone sur $[0;1]$.

/2 **b)** En déduire que l'équation $g(x)=\frac{1}{4}$ admet une unique solution. On appelle cette solution α .

2) Retour au problème posé.

/1 **a)** Calculer $f'(a)$ pour $0\leqslant a\leqslant 1$.

/2 **b)** Montrer que l'équation $f'(a)=-1$ admet pour unique solution α *(le même α que ci-dessus !).*

/1 **c)** En déduire que $\mathscr{C}$ admet une unique tangente parallèle à (PR) .

3) Construction de la tangente.

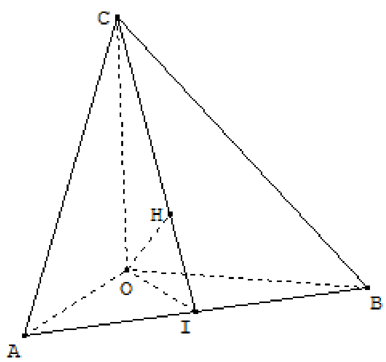
/2 **a)** Montrer que $f(\alpha)=-\frac{1}{4}(\alpha-1)$.

/3 **b)** En déduire une construction de α puis de la tangente cherchée sur le dessin ci-dessus.

/12,5

Exercice 3.

OABC est un tétraèdre tel que les triangles OAB, OAC et OBC soient tous des triangles rectangles isocèles en O. On pose $OA=OB=OC=a$. On appelle I le milieu de [AB] et H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle COI.



/1,5 **1) a)** Déterminer la nature du triangle ABC.

/2 **b)** Calculer son aire $\mathscr{A}$ en fonction de a .

/3 **2) a)** Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (COI).

/1 **b)** En déduire que la droite (AB) est orthogonale à la droite (OH).

/1,5 **c)** En déduire que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

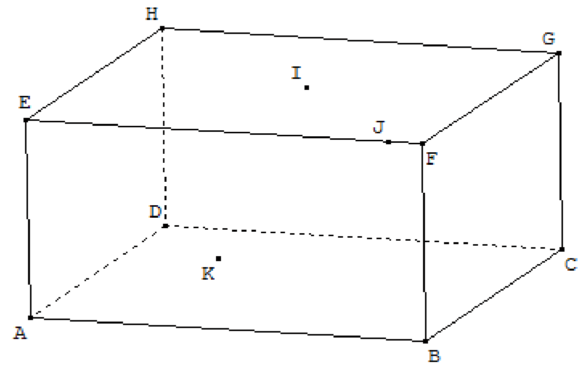
/0,5 **d)** Que peut-on dire des plans (ABC) et (COI) ?

/3 **3)** En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OABC, calculer OH en fonction de a.

Suite au dos : TSVP

/6	**Exercice 4.**

Le point J est un point de l'arête [EF], K est un point de la face ABFE et I est un point de la face EFGH. Construire <u>sur cette feuille</u> la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJK). Sur votre copie ou sous la figure, justifiez les points essentiels de la construction.



Exercice 1.

1) $f(x)=(7+4x)\sqrt{3-12x}$

● f est définie ssi $3-12x\geqslant 0$, ce qui équivaut à $3\geqslant 12x$ càd $x\leqslant\frac{1}{4}$, càd $\boxed{D_f=\left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right]}$.

● La fonction $x\mapsto 7+4x$ est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto\sqrt{3-12x}$ est dérivable ssi $3-12x>0$, ce qui équivaut à $x<\frac{1}{4}$, càd $x\in\left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right[$.

→ Finalement, f est dérivable sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right[$ comme produit de fonctions dérivables.

● *Dérivée de* f : Par la formule de dérivation d'un produit,

$$f'(x)=4\sqrt{3-12x}+(7+4x)\times\frac{-12}{2\sqrt{3-12x}}=4\sqrt{3-12x}+(7+4x)\times\frac{-6}{\sqrt{3-12x}}=\frac{4(3-12x)-6(7+4x)}{\sqrt{3-12x}}$$
$$=\frac{12(1-4x)-6(7+4x)}{\sqrt{3-12x}}=\frac{6[2(1-4x)-(7+4x)]}{\sqrt{3-12x}}=\frac{6[-5-12x]}{\sqrt{3-12x}}$$

Comme le dénominateur et 6 sont positifs, $f'(x)$ est du signe de $-12x-5$. Or $-12x-5>0\Leftrightarrow -12x>5\Leftrightarrow x<-\frac{5}{12}$.

● *Tableau de variations de* f

x	$-\infty$		$-\frac{5}{12}$		$\frac{1}{4}$
signe de $f'(x)$		+	0	−	
f		↗	$\frac{32\sqrt{2}}{3}$	↘	0

2) *L'idée* : Pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-15$, on découpe le domaine de définition de l'équation en trois intervalles, deux dont on prouve qu'ils ne peuvent pas contenir de solutions et un dont on prouve qu'il contient exactement une solution.

● $f(-1)=3\sqrt{15}\approx 11{,}61>0$. On en déduit que si $x\in\left[-1\,;\frac{1}{4}\right]$, alors $f(x)\geqslant 0$ (voir tableau de variations) donc l'équation $f(x)=-15$ n'a pas de solution dans l'intervalle $\left[-1\,;\frac{1}{4}\right]$.

● On constate aussi que $f(-4)=-9\sqrt{51}\approx -64{,}3<-15$. Comme $f(-4)<-15$, $f(-1)>-15$ et f est continue et strictement croissante sur $[-4;-1]$, par le théorème de la bijection on en déduit que l'équation $f(x)=-15$ admet une unique solution dans $[-4;-1]$.

● Si $x\in[-\infty;-4]$, alors $f(x)\leqslant f(-4)<-15$ donc l'équation $f(x)=-15$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[-\infty;-4]$.

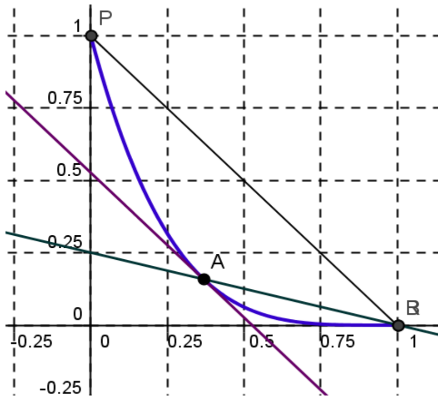
→ Finalement, l'équation $f(x)=-15$ admet une unique solution sur son domaine de définition.

Exercice 2.

1) Étude d'une fonction auxiliaire. $g(x)=(1-x)^3$.

a) $g'(x)=3(1-x)^2\times(-1)=-3(1-x)^2$. Le carré d'un nombre réel est toujours positif donc $g'(x)<0$ sur $]0;1[$ donc g est strictement décroissante sur $[0;1]$.

b) $g(0)=1>\frac{1}{4}$, $g(1)=0<\frac{1}{4}$, g , qui est un polynôme, est continue sur $[0,1]$ et g est strictement décroissante sur $[0;1]$: Par le théorème de la bijection on en déduit que l'équation $g(x)=\frac{1}{4}$ admet une unique solution dans [0,1].



2) Retour au problème posé.

a) $f'(a)=4(1-a)^3(-1)=-4(1-a)^3$ pour $0\leqslant a\leqslant 1$.

b) $f'(a)=-1\Leftrightarrow -4(1-a)^3=-1\Leftrightarrow (1-a)^3=\frac{1}{4}\Leftrightarrow g(a)=\frac{1}{4}$. Les équations $f'(a)=-1$ et $g(a)=\frac{1}{4}$ sont équivalentes, elles ont donc exactement les mêmes solutions. Or on a vu que que l'équation $g(a)=\frac{1}{4}$ admet une unique solution α dans [0,1], donc l'équation $f'(a)=-1$ admet pour unique solution α .

c) La droite (PR) a pour coefficient directeur -1. $\mathscr{C}$ admet une tangente à parallèle à (PR) au point d'abscisse a ssi la tangente en ce point a elle aussi pour coefficient directeur -1 ce qui équivaut à $f'(a)=-1$. Comme cette équation a une unique solution, $\mathscr{C}$ admet une unique tangente à parallèle à (PR) .

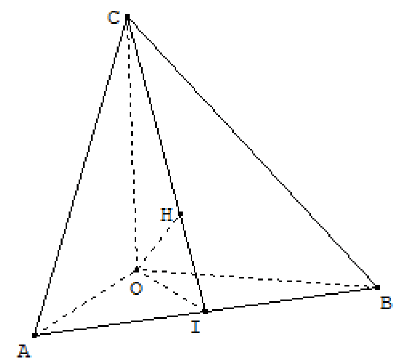
3) Construction de la tangente.

a) $f(\alpha)=(1-\alpha)^4=(1-\alpha)(1-\alpha)^3=(1-\alpha)g(\alpha)\overset{(1)}{=}(1-\alpha)\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(\alpha-1)$; *(1) car* $g(\alpha)=\frac{1}{4}$

b) $f(\alpha)=-\frac{1}{4}(\alpha-1)$ signifie que le point de coordonnées $(\alpha; f(\alpha))$ appartient à la droite d'équation $y=-\frac{1}{4}(x-1)$. On trace cette droite, elle coupe la courbe représentative de f au point d'abscisse α . La tangente cherchée est <u>la droite parallèle à (PR) passant par ce point</u>.

Exercice 3.

OABC est un tétraèdre tel que les triangles OAB, OAC et OBC soient tous des triangles rectangles isocèles en O. On pose $OA=OB=OC=a$. On appelle I le milieu de [AB] et H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle COI.



1) a) En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles rectangles OAB, OAC et OBC, on obtient que $AB=BC=CA=\sqrt{2}a$, donc le triangle ABC est équilatéral.

b) Les hauteurs d'un triangle équilatéral ont toutes pour longueur $h=côté\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\mathscr{A}=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}\sqrt{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

2) a) La droite (OI) est une médiane du triangle OAB. Ce triangle étant isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi une hauteur donc (OI) est orthogonale à (AB). On montre de même, en utilisant le triangle ABC équilatéral donc isocèle en C, que (IC) est orthogonale à (AB).
→ La droite (AB) est donc orthogonale à (OI) et (CI) qui sont deux droites sécantes du plan (COI) donc, par <u>le théorème de la porte, (AB) est orthogonale au plan (COI)</u>.

b) On vient de montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (COI). La droite (AB) est donc orthogonale à toutes les droites du plan (COI), en particulier à (OH). $\boxed{(AB)\perp(OH)}$

c) La droite (OH) est orthogonale à (AB) d'après la question précédente et la droite (OH) est aussi orthogonale à (CI) car OH est la hauteur issue de O dans le triangle COI.

La droite (OH) est orthogonale à (AB) et (OI) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC) donc, par le théorème de la porte, (OH) est orthogonale au plan (ABC).

d) Que peut-on dire des plans (ABC) et (COI) ? Le plan (COI) contient la droite (OH) qui est une droite perpendiculaire au plan (ABC) donc ces plans sont orthogonaux.

3) En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OABC, calculer OH en fonction de a.

● D'une part, (OH) est orthogonale au plan (ABC) donc OH est la hauteur du tétraèdre associée à la base ABC d'où $\mathcal{V}=\frac{1}{3}bh=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\times OH=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2\times OH$ $\quad \mathcal{V}=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2\times OH$

● D'autre part, en considérant la base OAB et la hauteur OC correspondante, $\mathcal{V}=\frac{1}{3}bh=\frac{1}{3}\times\frac{a^2}{2}a=\frac{1}{6}a^3$.

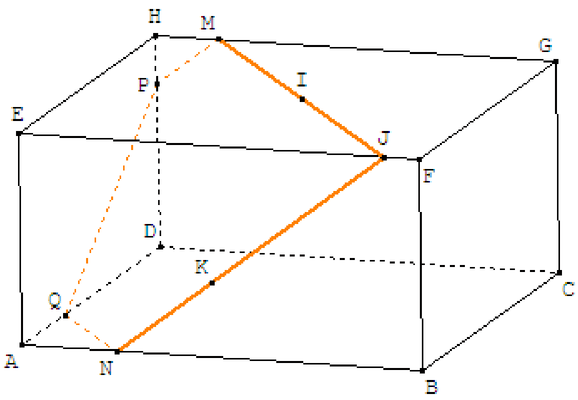
● Ces deux quantités sont égales d'où $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2\times OH=\frac{1}{6}a^3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \sqrt{3}\times OH=a \Leftrightarrow OH=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

(1) En multipliant les deux membres par 6 et en divisant les deux membres par a^2.

Finalement, $\boxed{OH=\frac{\sqrt{3}}{3}a}$.

Exercice 4.

Méthode : On utilise le fait qu'un plan coupe des plans parallèles selon des droites parallèles.



● Intersection avec les faces ABEF et EFGH : Construction de M et N.

○ Les droites (IJ) et (HG) sont dans le plan de la face EFGH. Comme elles ne sont pas parallèles, on peut construire leur point d'intersection M.
○ De même on construit N comme point d'intersection des droites (JK) et (AB) dans le plan de la face ABEF.

● Intersection avec les faces ABCD et CDGH : Construction de P et Q.

○ **Le plan (IJK) coupe les plans parallèles (ABE) et (CDG) selon des droites parallèles.** L'intersection du plan (IJK) et de la face DCGH est donc la droite parallèle à (JK) passant par M. Elle coupe (HD) en P.
○ De même, sachant que **le plan (IJK) coupe les plans parallèles (EFG) et (ABC) selon des droites parallèles**, on construit Q.

Cet argument est indispensable pour prouver que les parallèles ainsi tracées sont bien dans le plan (IJK).

L'intersection du plan (IJK) avec les faces du pavé est le quadrilatère JMPQN.