SUJET D

D.S. n°1 : Espace, Dérivées, Continuité — TS1

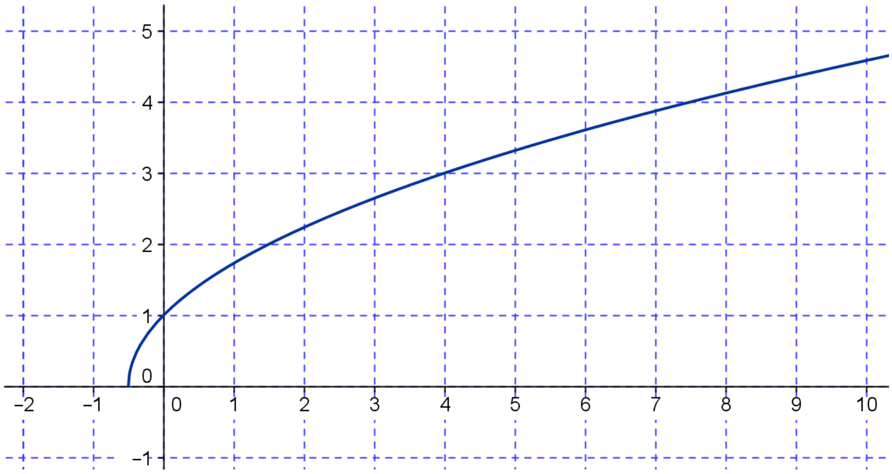
Vendredi 4 octobre 2013, 2h, **Calculatrices autorisées**. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Note : $\overline{20}$

/4 **Exercice 1.**

On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 4.



/1,5 **1)** Déterminer l'équation de T_4, la tangente à $\mathscr{C}$ au point A et tracer T_4 sur la figure.

2) L'objectif de cette question est de montrer que $\mathscr{C}$ est toujours en dessous de T_4. Soit g la fonction définie par $g(x)=\sqrt{2x+1}-\frac{x}{3}-\frac{5}{3}$

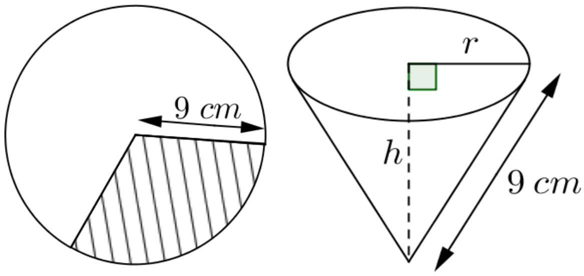
/1,5 **a)** Déterminez le tableau de variations de g sur son domaine de définition

/1 **b)** Conclure.

/6 **Exercice 2. Frites**

Un vendeur de frites souhaite vendre des portions normales servies dans des cornets de $150\,cm^3$ et des portions « Maxi » servies dans des cornets de $300\,cm^3$.

Il fabrique ses cornets de frites en enlevant un secteur angulaire d'un disque en carton de rayon 9 cm, voir figures ci-contre.



On enlève la partie hachurée du disque représenté à gauche puis on colle les deux bords ensemble pour obtenir le cornet de frites représenté à droite. Suivant la taille du secteur angulaire enlevé, on obtiendra des cornets plus ou moins pointus.

On rappelle que le volume d'un cône est donné par la formule $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ où h et r sont exprimés en cm et V en cm^3.

Dans tout ce qui suit, on prendra ces unités.

/1 **1) a)** Exprimer r en fonction de h.

b) Montrer que V s'exprime en fonction de h par $V=\frac{1}{3}\pi(81-h^2)h$.

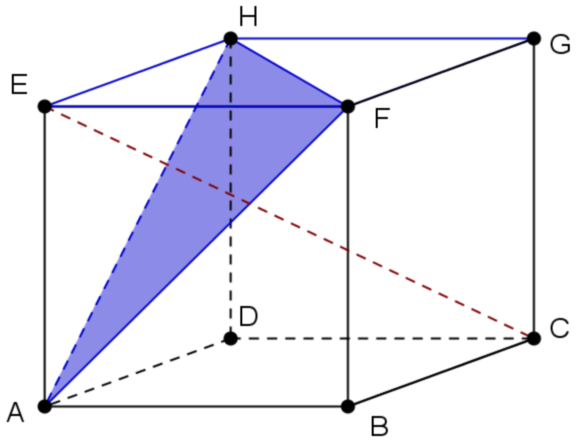
/1,5 **2)** Déterminer le tableau de variations de V pour $0\leqslant h\leqslant 9$.

/3,5 **3) a)** Le cône peut-il avoir un volume de $300\,cm^3$? Si oui, donner un encadrement au mm près la (les) hauteur(s) correspondantes.

b) Le cône peut-il avoir un volume de $150\,cm^3$? Si oui, donner un encadrement au mm près la (les) hauteur(s) correspondantes.

/11	**Exercice 3.**

ABCDEFGH est un cube d'arête 4 cm.



/3 **1) Mise en route, quelques intersections...ou pas!**

a) Quelle est la position relative des droites (AF) et (HG)? Si elles sont sécantes, construire leur point d'intersection.

b) Construire l'intersection des plans (AFH) et (AGE). Justifier.

c) Construire l'intersection des plans (AFH) et (ABC). Justifier.
Bonus: Donner deux justifications de la construction. Elles doivent être différentes et indépendantes l'une de l'autre.

/4 **2)** L'objectif de cette question est de montrer que **la droite (EC) est orthogonale au plan (AFH)**.

a) Montrer que la droite (AF) est orthogonale au plan (BEC).

b) En déduire que les droites (AF) et (EC) sont orthogonales.

c) *Compléter sans justification*: On montrerait de même que la droite (AH) est orthogonale au plan . . . . . . puis que la droite (AH) est orthogonale à (EC).

d) En déduire que la droite (EC) est orthogonale au plan (AFH).

/1,5 **3)** Soit M le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH). L'objectif de cette question est de **construire M.**

a) Montrer que M appartient au plan (AGE).

b) En déduire la construction de M (à faire directement sur la figure). *Justifier.*

/2,5 **4) Étude du tétraèdre AEFH.**

a) Représenter en vue de face et en vraie grandeur le plan (AGE). Tous les éléments (points, segments, droites) de la figure contenus dans ce plan doivent figurer sur votre dessin, notamment M. *On rappelle que AE=4 cm.*

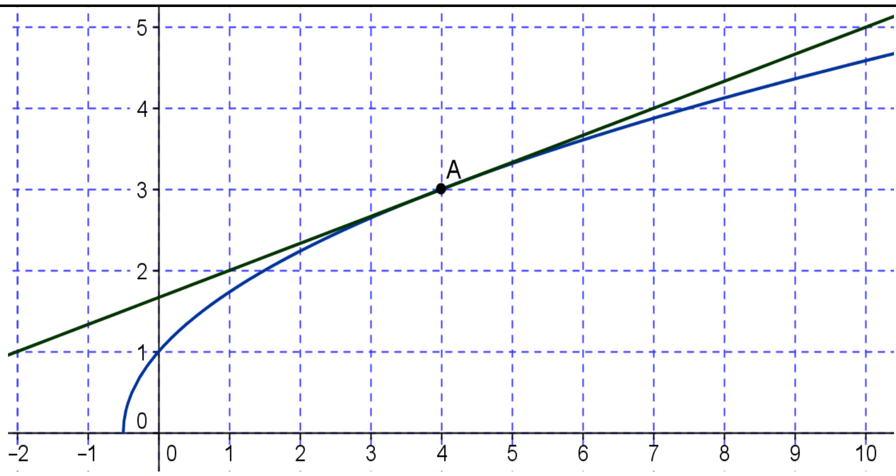
b) Préciser la nature du triangle AHF et calculer son aire.

c) *Bonus*: Calculer le volume du tétraèdre AEFH puis la longueur ME.

Corrigé du DS 1

Exercice 1.

On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{2x+1}$.



Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 4.

1) Déterminer l'équation de T_4, la tangente à $\mathscr{C}$ au point A et tracer T_4 sur la figure.

$f(x)=\sqrt{2x+1}$. f est dérivable en x dès que $2x+1>0$ càd $x>-\frac{1}{2}$ et sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4 a pour équation $y=f'(4)(x-4)+f(4)$. Avec $f(4)=3$ et $f'(4)=\frac{1}{3}$, on obtient $y=\frac{1}{3}(x-4)+3$ càd $\boxed{y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}$.

2) L'objectif de cette question est de montrer que $\mathscr{C}$ est toujours en dessous de T_4. Soit g la fonction définie par $g(x)=\sqrt{2x+1}-\frac{x}{3}-\frac{5}{3}$

a) Déterminez le tableau de variations de g sur son domaine de définition.

$g(x)=f(x)-\frac{x}{3}-\frac{5}{3}$ donc sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, g est dérivable comme somme de fonctions dérivables avec $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{1}{3}=\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. Comme une racine est toujours positive, par la règle des signes, $g'(x)$ est du signe de son numérateur $3-\sqrt{2x+1}$.

<u>Méthode 1</u> : $g'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 3-\sqrt{2x+1}\geqslant 0 \Leftrightarrow 3\geqslant\sqrt{2x+1} \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 9\geqslant 2x+1 \\ 2x+1\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow 0\leqslant 2x+1\leqslant 9 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$.

L'équivalence (i) est obtenue dans le sens « $\Rightarrow$ » en appliquant la fonction carré et en remarquant que $3+\sqrt{2x+1}$ n'existe que si $2x+1\geqslant 0$. Elle est obtenue dans le sens « $\Leftarrow$ » en appliquant la fonction racine carré aux nombres positifs 9 et $2x+1$.

<u>Méthode 2</u> : En utilisant l'expression conjuguée (C'est celle que nous avions faite en classe pour une dérivée similaire).

$$g'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 3-\sqrt{2x+1}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1})}{3+\sqrt{2x+1}}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{9-(2x+1)}{3+\sqrt{2x+1}}\geqslant 0 \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 9-(2x+1)\geqslant 0 \\ 2x+1\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$$

L'équivalence (ii) est obtenue dans le sens « $\Rightarrow$ » en remarquant d'une part que le dénominateur est toujours positif donc le quotient est du signe de son numérteur et d'autre part que le dénominateur $3+\sqrt{2x+1}$ n'existe que si $2x+1\geqslant 0$.

L'équivalence (ii) est obtenue dans le sens « $\Leftarrow$ » en remarquant d'une part que $2x+1\geqslant 0$ donc la quantité $3+\sqrt{2x+1}$ existe et d'autre part que diviser par une quantité positive ne change pas le signe d'une expression.

Le tableau de variations de g sur son domaine de définition est donc

x	$-\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
signe de g'(x)		+	0	−	
g		↗	0	↘	

b) Conclure. D'après le tableau de variation de g, pour tout réel $x\in\mathscr{D}_f$, $g(x)\leqslant 0$. Autrement dit, $\forall x\in\mathscr{D}_f, \sqrt{2x+1}\leqslant\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$. Géométriquement, comme $\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$ est l'ordonnée du point de la tangente T_4 d'abscisse *x*, cette inégalité veut dire que le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x est toujours en-dessous du point de même abscisse de la tangente T_4. Autrement dit, $\mathscr{C}$ <u>est toujours en dessous de</u> T_4.

Exercice 2. Frites

1) a) Grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle d'hypoténuse 9 et de côtés r et h, on obtient $r^2+h^2=9^2$ d'où $r^2=81-h^2$ càd $r=\sqrt{81-h^2}$.

b) En remplaçant $r^2=81-h^2$ dans $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, on obtient $V=\frac{1}{3}\pi(81-h^2)h$.

2) Déterminer le tableau de variations de V pour $0\leqslant h\leqslant 9$.

Pour dériver V comme une somme plutôt que comme un produit, remarquons d'abord que $V=\frac{\pi}{3}(81h-h^3)$. V est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme en h et $V'=\frac{\pi}{3}(81-3h^2)$ qui est du signe de $81-3h^2$.

Le trinôme $81-3h^2$ a deux racines distinctes $x_1=\sqrt{\frac{81}{3}}=\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=3\sqrt{3}$ et $x_2=-\sqrt{\frac{81}{3}}=-3\sqrt{3}$.

$81-3h^2$ est un polynôme de degré deux, il est donc du signe de $a=-3<0$ à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre les racines. On en déduit que sur $[0;9]$, $81-3h^2\geqslant 0$ ssi $h\in[0;3\sqrt{3}]$.

Son tableau de variations est donc

x	0		$3\sqrt{3}$		9
signe de V'(x)		+	0	−	
Variations de V	0	↗	$54\pi\sqrt{3}$	↘	0

3) a) Le *maximum* de *V* sur $[0;9]$ est $54\pi\sqrt{3}\approx 294\,cm^3$ donc le cône ne peut <u>pas</u> avoir un volume de $300\,cm^3$

b) Le cône peut-il avoir un volume de $150\,cm^3$? Si oui, donner un encadrement au mm près la (les) hauteur(s) correspondantes.

Méthode : On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur $[0;3\sqrt{3}]$ puis sur $[3\sqrt{3};9]$.

■ Sur $[0;3\sqrt{3}]$:

- *V* est continue et strictement croissante sur $[0;3\sqrt{3}]$
- $V(0)=0<150$
- $V(3\sqrt{3})>150$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $V(x)=150$ admet une unique solution dans $[0;3\sqrt{3}]$ que l'on notera par la suite α.

On cherche ensuite une valeur approchée de α en faisant un tableau de valeurs à la calculatrice:
$V(1{,}8)\approx 146{,}6<150$ et $V(1{,}9)\approx 154>150$ donc $\boxed{1{,}8<\alpha<1{,}9.}$
On pourrait de même prouver que $1{,}84<\alpha<1{,}85$ donc $\alpha\approx 1{,}8\,cm$.

■ On recommence sur $[3\sqrt{3};9]$:

- *V* est continue et strictement décroissante sur $[3\sqrt{3};9]$
- $V(3\sqrt{3})>150$
- $V(9)=0<150$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $V(x)=150$ admet une unique solution dans $[0;3\sqrt{3}]$ que l'on notera par la suite β.

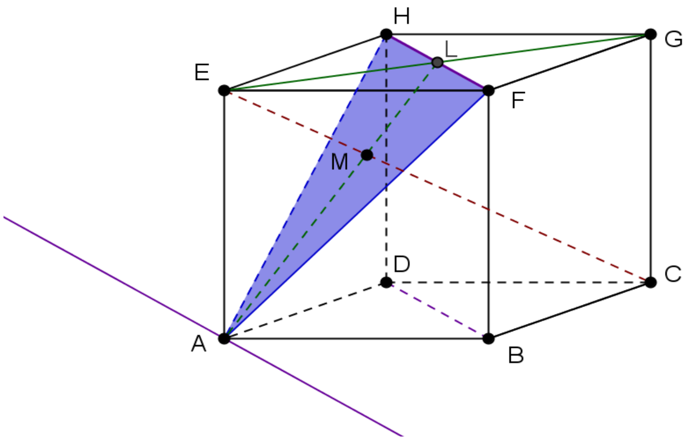
On cherche ensuite une valeur approchée de α en faisant un tableau de valeurs à la calculatrice:
$V(7{,}9)\approx 154>150$ et $V(8)\approx 142<150$ donc $\boxed{7{,}9<\beta<8{,}0.}$
On pourrait de même prouver que $7{,}93<\beta<7{,}94$ donc $\beta\approx 7{,}9\,cm$.

Exercice 3.

ABCDEFGH est un cube d'arête 4 cm.

[Vous aurez reconnu la configuration vue dans un exercice fait en TD où il fallait justement construire le point M. Avec CarMetal, on pouvait visualiser la situation, en coloriant le plan (AGE) et faisant tourner la figure.

Mais si, rappelez--vous, c'est le premier de la liste http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/diaporamas/deux/exoEspace/index.html]



1) Mise en route, quelques intersections...ou pas!

a) Les droites (AF) et (HG) sont non coplanaires sinon A appartiendrait au plan (FGH).

b) Construire l'intersection des plans (AFH) et (AGE).

▪ Les droites (EG) et (HF) sont *coplanaires* dans le plan (EFG). On construit leur point d'intersection L.

▪ Montrons que le point L ainsi construit est bien dans l'intersection des plans (AFH) et (AGE) :

$$\left.\begin{array}{l} L\in(FH)\subset(AFH) \\ L\in(EG)\subset(AEG) \end{array}\right\} \text{donc } L\in(AFH)\cap(AEG)\ .$$

▪ Comme le point A appartient lui aussi à l'intersection des plans (AFH) et (AGE), l'intersection des plans (AFH) et (AGE) est la droite (AL).

c) Construire l'intersection des plans (AFH) et (ABC). Justifier.

▪ Justification 1: Par le théorème du toit

$$\left.\begin{array}{c} (FH)\|(BD) \\ (FH)\subset(AFH) \\ (BD)\subset(ABC) \end{array}\right\}$$

Les plans (AFH) et (ABC) contiennent respectivement les droites (FH) et (BD) qui sont parallèles. Par le théorème du toit, leur intersection est une droite parallèle à (FH) et (BD). *(« gouttières » et « haut du toit » en violet sur la figure)*

Comme de plus A est un point commun aux plans (AFH) et (ABC) leur droite d'intersection est la parallèle à (HF) passant par A. *(en violet sur la figure)*

▪ Justification 2: Par le théorème d'incidence

D'après le théorème d'incidence, le plan (AFH) coupe les plans *parallèles* (EFH) et (ABC) selon des droites parallèles. Comme le plan (AFH) coupe (EFH) selon (FH), il coupe (ABC) selon une droite parallèle à (FH). Comme de plus A est un point commun aux plans (AFH) et (ABC) leur droite d'intersection est la parallèle à (FH) passant par A. *(en violet sur la figure)*

2) L'objectif de cette question est de montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (AFH).

a) Montrer que la droite (AF) est orthogonale au plan (BEC).

▪ (AF) est perpendiculaire à (BE) car (AF) et (BE) sont les diagonales du carré ABFE.

▪ (AF) est orthogonale à (BC) car dans le cube ABCDEFGH l'arête (BC) est orthogonale à la face ABFE donc à toute droite de (ABF), en particulier à (AF).

▪ Finalement, (AF) est orthogonale à (BE) et (BC) qui sont deux droites sécantes du plan (BEC) donc par le théorème de la porte, (AF) est orthogonale au plan (BEC).

b) (AF) est orthogonale au plan (BEC) donc à toute droite de (BEC), en particulier à (EC). $\boxed{(EC)\perp(AF)}$

c) Compléter sans justification: On montrerait de même que la droite (AH) est orthogonale au plan *(CDE)* puis que la droite (AH) est orthogonale à (EC). $\boxed{(EC)\perp(AH)}$

Les détails (non demandés):

▪ *(AH) est perpendiculaire à (DE) car (AH) et (DE) sont les diagonales du carré ADHE.*

▪ *(AH) est orthogonale à (CD) car dans le cube ABCDEFGH l'arête (CD) est orthogonale à la face ADHE donc à toute droite de (ADH), en particulier à (AH).*

▪ *Finalement, (AH) est orthogonale à (DE) et (DC) qui sont deux droites sécantes du plan (CDE) donc par le théorème de la porte, (AH) est orthogonale au plan (CDE). (AH) est donc orthogonale à toute droite de (CDE), en particulier à (EC).* $\boxed{(EC)\perp(AH)}$

d) D'après les questions 2b) et 2c) la droite (EC) est orthogonale à (AF) et (AH) qui sont deux droites sécantes du plan (AFH) donc par le théorème de la porte, (EC) est orthogonale au plan (AFH).

3) Soit M le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH). L'objectif de cette question est de construire M.

a) M appartient à la droite (EC) qui est contenu dans (AGE) donc M appartient au plan (AGE).

b) En déduire la construction de M (à faire directement sur la figure). Justifier.

▪ Par définition, M appartient au plan (AFH). Comme de plus on vient de voir que M appartient au plan (AGE), M appartient au plan (AGE), M appartient donc à l'intersection des plans (AFH) et (AGE), qui est la droite (AL) d'après le 1b). M appartient à la droite (AL).

▪ Comme de plus M appartient à la droite (EC), on construit L comme le point d'intersection des droites (AL) et (EC).

4) Étude du tétraèdre AEFH.

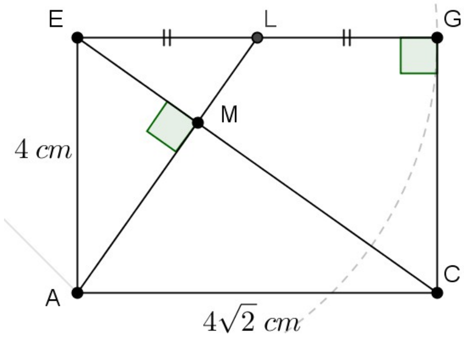
a) Représenter en vue de face et en vraie grandeur le plan (AGE). Tous les éléments (points, segments, droites) de la figure contenus dans ce plan doivent figurer sur votre dessin, notamment M.

Explications:

▪ [AC] et [EG] sont des diagonale de carrés de côté 4 cm donc $AC = EG = 4\sqrt{2}$ cm.

▪ Dans le cube ABCDEFGH l'arête (AE) est orthogonale à la face EFGH donc à toute droite de EFGH, en particulier à (EG) donc l'angle $\widehat{AEG}$ est droit. Pour des raisons similaires, les trois autres angles de ACGE sont droits donc ACGE est un rectangle.

▪ On a vu au 2d) que (EC) est orthogonale au plan (AFH) donc à toute droite de (AFH), en particulier à (AL) donc l'angle $\widehat{EMA}$ est droit.



b) Préciser la nature du triangle AHF et calculer son aire.

▪ Les trois côtés de ce triangle sont des diagonale de carrés de côté 4 cm donc les trois côtés sont égaux (ils mesurent tous $4\sqrt{2}$ cm) donc le triangle AHF est équilatéral.

▪ La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a mesure $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Pythagore...) donc la hauteur de AFH mesure $4\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$ cm. L'aire de AHF est $\mathscr{A}_{AHF} = \frac{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}\,cm^2$. $\boxed{\mathscr{A}_{AHF} = 8\sqrt{3}\,cm^2.}$

c) Bonus: Calculer le volume du tétraèdre AEFH puis la longueur ME.

▪ Dans le tétraèdre AEFH, la hauteur correspondant à la base AEF est EH. Comme AEH a pour aire $\mathscr{V} = \frac{32}{3}$ et que $\frac{1}{3}\left(8\sqrt{3} \times ME\right) = \frac{32}{3} \Leftrightarrow 8\sqrt{3} \times ME = 32 \Leftrightarrow ME = \frac{32}{8\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,cm.$, le volume du tétraèdre est $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times 8 \times 4 = \frac{32}{3}$. $\boxed{\mathscr{V} = \frac{32}{3}\,cm^3}$

▪ Pour déterminer ME, on calcule de nouveau le volume du tétraèdre mais en considérant cette fois la base AFH et la hauteur correspondante est [ME]. On a en effet prouvé au 2d) que (EC) est orthogonale au plan (AFH). Comme d'après 4b) AEH a pour aire $\mathscr{A}_{AHF} = 8\sqrt{3}\,cm^2$, le volume du tétraèdre est $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\left(8\sqrt{3} \times ME\right) cm^3$.

▪ Or on vient de voir que $\mathscr{V} = \frac{32}{3}$ ce qui nous donne une équation d'inconnue ME:

$\frac{1}{3}\left(8\sqrt{3} \times ME\right) = \frac{32}{3} \Leftrightarrow 8\sqrt{3} \times ME = 32 \Leftrightarrow ME = \frac{32}{8\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,cm.$ $\boxed{ME = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,cm.}$

Remarque: On aurait pu aussi calculer ME par des considérations de géométrie plane en se basant sur la figure du 4a).