D.S. de mathématiques n°1 *Suites*	TS : Préparation aux mathématiques du supérieur

Vendredi 15 octobre 2010, 2h,

<u>Calculatrices autorisées</u>

Ce sujet est à rendre avec la copie.

Un corrigé sera disponible sur le site http://lhelmeg.keepandshare.com/

NOM:

PRENOM :

Communication : – 0 +
Technique : – 0 +
Raisonnement : – 0 +

	Note
Exercice 1	, / 4
Exercice 2	, / 4
Exercice 3	, / 4
Exercice 4	, / 4
Exercice 5	, / 4
Note	, / **20**

/4

Exercice 1 Questions de cours

1) Donner la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.

2) Montrer qu'une suite convergente est nécessairement bornée.

/4

Exercice 2

Soit (u_n) une suite réelle de limite ℓ et (v_n) une suite réelle de limite ℓ'.
Montrer que la somme de ces deux suites est une suite convergente dont on précisera la limite.

Remarque: (u_n) *est une « suite réelle » signifie que pour tout* n, u_n *est un nombre réel* $(u_n\in\mathbb{R})$.

/4

Exercice 3

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que la suite (u_{2n}) est convergente vers une limite ℓ, que la suite (u_{2n+1}) est convergente vers une limite ℓ' et que que la suite (u_{3n}) est convergente vers une limite ℓ''.

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

On pourra utiliser sans le redémontrer le résultat vu en classe: Si la suite des termes d'indice pairs et la suite des termes d'indice impairs d'une suite (u_n) *convergent vers la même limite alors la suite* (u_n) *est convergente vers cette limite commune.*

/4

Exercice 4

Un fabricant d'emballages souhaite fabriquer une boîte de conserve cylindrique de volume 1 litre en minimisant la surface de métal utilisée.
Donner les dimensions d'une telle boîte.

/4

Exercice 5 Question ouverte

Que peut-on dire d'une suite d'entiers qui est convergente?

Faites une conjecture et démontrez-la.

Remarque: (u_n) *est une « suite d'entiers » signifie que pour tout* n, u_n *est un nombre entier* $(u_n\in\mathbb{Z})$.

D.S. de mathématiques n°1 *Suites* CORRIGÉ	**TS** : Préparation aux mathématiques du supérieur

Exercice 2

Soit (u_n) une suite réelle de limite ℓ et (v_n) une suite réelle de limite ℓ'.
Montrer que la somme de ces deux suites est une suite convergente dont on précisera la limite.
Remarque: ***(u_n) est une « suite réelle » signifie que pour tout n, u_n est un nombre réel $(u_n \in \mathbb{R})$.***

Réponse: Soit $\varepsilon > 0$. $\exists n_1$ tel que $\forall\ n \geqslant n_1, |u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\exists n_2$ tel que $\forall\ n \geqslant n_2, |v_n - l'| < \dfrac{\varepsilon}{2.}$

Soit $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n + v_n - l - l'| \overset{(\Delta)}{\leqslant} |u_n - l| + |v_n - l'| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ce résultat est valable pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui prouve que $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$ □

(Δ) Remarque: On a utilisé l'inégalité triangulaire: $\forall\ x$ et y, on a $|x+y| \leqslant |x| + |y|$, valable pour la valeur absolue si x et y sont des réels, valable pour le module si x et y sont des complexes et valable pour la norme si x et y sont des vecteurs.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que la suite (u_{2n}) est convergente vers une limite ℓ, que la suite (u_{2n+1}) est convergente vers une limite ℓ' et que que la suite (u_{3n}) est convergente vers une limite ℓ''.

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

On pourra utiliser sans le redémontrer le résultat vu en classe: Si la suite des termes d'indice pairs et la suite des termes d'indice impairs d'une suite (u_n) convergent vers la même limite alors la suite (u_n) est convergente vers cette limite commune.

Réponse:

- (u_{6n}) est une suite extraite de (u_{3n}) donc elle converge vers la même limite d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{6n} = \ell''$. Par ailleurs, (u_{6n}) est une suite extraite de (u_{2n}) donc elle converge vers la même limite d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{6n} = \ell$. On en déduit que $\ell = \ell''$.
- (u_{6n+3}) est une suite extraite de (u_{3n}) donc elle converge vers la même limite d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{6n+3} = \ell''$. Par ailleurs, (u_{6n+3}) est une suite extraite de (u_{2n+1}) donc elle converge vers la même limite d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{6n+3} = \ell'$. On en déduit que $\ell' = \ell''$.
- Finalement, comme $\ell' = \ell''$ et $\ell' = \ell''$, on a $\ell = \ell'$. Or on sait que si la suite des termes d'indice pairs et la suite des termes d'indice impairs d'une suite (u_n) convergent vers la même limite alors la suite (u_n) est convergente vers cette limite commune. □

Exercice 5 Question ouverte

Que peut-on dire d'une suite d'entiers qui est convergente?
Faites une conjecture et démontrez-la.
Remarque: ***(u_n) est une « suite d'entiers » signifie que pour tout n, u_n est un nombre entier $(u_n \in \mathbb{Z})$.***

Réponse: Une suite d'entiers qui est convergente est constante à partir d'un certain rang.
Prouvons-le: Soit (u_n) est une suite d'entiers qui converge vers une limite l.

Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{3} > 0$. $\exists n_1$ tel que $\forall\ n \geqslant n_1, |u_n - \ell| < \varepsilon$.

$$\forall\ n \geqslant n_1, |u_n - u_{n+1}| \leqslant |u_n - \ell + \ell - u_{n+1}| \leqslant^{(\Delta)} |u_n - \ell| + |u_{n+1} - \ell| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3} < 1.$$

Comme u_n et u_{n+1} sont tous deux des nombres entiers, cela veut dire que $\forall\ n \geqslant n_1, u_n = u_{n+1}$.

La suite (u_n) est donc constante à partir du rang n_1. ↗

(Δ) *Par l'inégalité triangulaire.*

Exercice 4

Un fabricant d'emballages souhaite fabriquer une boîte de conserve cylindrique de volume 1 litre en minimisant la surface de métal utilisée.

Donner les dimensions d'une telle boîte.

Réponse:

Soit r le rayon de la boîte de conserve et h sa hauteur.

- On exprime la fonction à optimiser: On veut minimiser l'aire $A=2\pi r^2+2\pi rh$ (Fond + couvercle +surface latérale).

- Comme toujours dans les problèmes d'optimisation, on se ramène à une fonction d'une variable pour pouvoir étudier ses variations grâce à sa dérivée.

Le volume de la boîte est égal à un litre, ce qui donne, en exprimant toutes les longueurs en décimètres, $V=\pi r^2 h=1$. On en déduit $h=\frac{1}{\pi r^2}$ d'où, par substitution dans A, $A(r)=2\pi r^2+\frac{2\pi r}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2}{r}$.

- On étudie les variations de la fonction à optimiser grâce à sa dérivée.

$A'(r)=4\pi r-\frac{2}{r^2}=\frac{4\pi r^3-2}{r^2}$ qui est du signe de $2\pi r^3-1$.

Or $2\pi r^3>1$ ssi $r^3>\frac{1}{2\pi}$ ssi $r>\frac{1}{(2\pi)^{1/3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$, d'où le tableau de variations:

r	0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$		
$A'(r)$		$-$	0	$+$	
$A(r)$		$\searrow$		$\nearrow$	

L'aire est donc minimale pour $r=\frac{1}{(2\pi)^{1/3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$. La hauteur correspondante est

$$h=\frac{1}{\pi r^2}=\frac{1}{\pi\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/3}}\right)^2}=\frac{(2\pi)^{2/3}}{\pi}=\frac{(2)^{2/3}}{\pi^{1/3}}=\frac{(2)^{2/3}\cdot 2^{1/3}}{\pi^{1/3}\cdot 2^{1/3}}=\frac{2}{\pi^{1/3}\cdot 2^{1/3}}=\frac{2}{(2\pi)^{1/3}}=2r .$$

- Conclusion: La surface de métal utilisée pour construire une boîte de conserve cylindrique de volume 1 litre est donc minimale pour $r=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\text{dm}$ et $h=2r=\frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}\text{dm}$.

Remarque: Exprimer r et h en dm plutôt qu'en cm permet d' avoir des formules plus simples.