D.S. de mathématiques n°1 *Espaces vectoriels*	**TS** : Préparation aux mathématiques du supérieur

Vendredi 11 mars 2011, 1h30,

Calculatrices autorisées

Ce sujet est à rendre avec la copie.

Un corrigé sera disponible sur le site http://lhelmeg.keepandshare.com/

NOM:

PRENOM :

Communication : + 0 –
Technique : + 0 –
Raisonnement : + 0 –

	Note
Exercice 1	, / 2
Exercice 2	, / 4
Exercice 3	, / 9
Exercice 4	, / 5
Note	, / **20**

/2

Exercice 1 Questions de cours

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.

Montrer que : f injective $\Leftrightarrow Ker\ f=\{0\}$

/4

Exercice 2

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réelles, est un espace vectoriel *(On ne demande pas de le montrer)*.

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

/2 **1)** $\mathcal{A}$, l'ensemble des suites arithmétiques.

/2 **2)** $\mathcal{G}$, l'ensemble des suites géométriques.

Rappel: (u_n) est une « suite réelle » signifie que pour tout n, u_n est un nombre réel $(u_n\in\mathbb{R})$.

/9

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soient f et g deux applications linéaires de E dans E telles que $f\circ g=Id$.

Attention, cela ne veut pas dire que g est l'inverse de f car pour cela, il faudrait aussi avoir $g\circ f=Id$, ce qui n'est pas forcément vrai.

Montrer que :

/3 **1)** $\operatorname{Im}(g\circ f)=\operatorname{Im} g$

/3 **2)** $Ker(g\circ f)=Ker\ f$

/3 **3)** $E=Ker\ f\oplus\operatorname{Im} g$

Posé à l'oral de l'E.S.C.P.

/2 **4)** Bonus (Hors barème) : Trouver un exemple de deux endomorphismes f et g tels que $f\circ g=Id$ et $g\circ f\neq Id$.

/5

Exercice 4

/3 **1)** Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :
$f(1, 0, 0)=(2, 1)$; $f(1, 2, 1)=(-4, 15)$; et $f(1, 0, 1)=(2, 5)$.
Calculer $f(x, y, z)$.

/2 **2)** Déterminer le noyau de f.

D.S. de mathématiques n°2 *Espaces vectoriels* **CORRIGÉ**	**TS :** Préparation aux mathématiques du supérieur

Exercice 1

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.

Montrer que : f injective $\Leftrightarrow Ker\, f=\{0\}$

Rappel : Une fonction f d'un ensemble E dans un ensemble F est injective ssi $\forall x, x'\in E,\quad f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$.

[Méthode : Par double implication]

■ « $\Rightarrow$ »

Supposons f injective. Soit $x\in Ker\, f$. $f(x)=f(0)$ et comme f injective, cela entraîne $x=0$. Comme ceci est vrai pour tous les x de $Ker\, f$, on a donc $Ker\, f=\{0\}$.

■ « $\Leftarrow$ »

Supposons $Ker\, f=\{0\}$. Soient $x, x'\in E$ tels que $f(x)=f(x')$. Ceci entraîne $f(x-x')=0$ puisque f est linéaire, c'est à dire $x-x'\in Ker\, f$. Or, $Ker\, f=\{0\}$ donc $x-x'=0$, i.e. $x=x'$, ce qui prouve que f injective.

Exercice 2

Fait en DM : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réelles, est un espace vectoriel *(On ne demande pas de le montrer).*

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1) A, l'ensemble des suites arithmétiques.

■ **Montrons que la suite nulle appartient à ce sous-ensemble** (La suite nulle est le vecteur nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$): La suite nulle est arithmétique de raison $r=0$.

■ **Montrons que l'ensemble des suites arithmétiques est stable par combinaison linéaire** :

Soient u et v deux suites arithmétiques de raisons respectives r et r'. Soient α et β deux réels. Il s'agit donc de montrer que la suite $w\overset{\text{def}}{=}\alpha u+\beta v$ est arithmétique.

$w_{n+1}=\alpha u_{n+1}+\beta v_{n+1}=\alpha(u_n+r)+\beta(v_n+r')=(\alpha u_n+\beta v_n)+(\alpha r+\beta r')=w_n+(\alpha r+\beta r')$. La suite w est donc arithmétique de raison $\alpha r+\beta r'$.

Ces deux conditions établissent que l'ensemble l'ensemble des suites arithmétiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2) G, l'ensemble des suites géométriques.

Montrons grâce à un contre exemple que l'ensemble des suites géométriques n'est pas stable par combinaison linéaire. Ceci suffira à prouver que ce n'est pas un un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soient u et v deux suites définies respectivement par $u_n=1^n$ et $v_n=2^n$. Elles sont géométriques. Montrons que $w\overset{\text{def}}{=}u+v$ n'est pas géométrique.

$w_0=u_0+v_0=1+1=2$; $w_1=u_1+v_1=1+2=3$ et $w_2=u_2+v_2=1+4=5$ donc $\frac{3}{2}=\frac{w_1}{w_0}\neq\frac{w_2}{w_1}=\frac{5}{3}$.

Ce contre exemple montre que l'ensemble des suites géométriques n'est PAS un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soient f et g deux applications linéaires de E dans E telles que $f\circ g=Id$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(g\circ f)=\mathrm{Im}\, g$ [Méthode : Par double inclusion]

■ Montrons que $\mathrm{Im}(g\circ f)\subseteq \mathrm{Im}\, g$ (C'est toujours vrai, on n'a pas besoin de l'hypothèse $f\circ g=Id$.): Soit $z\in\mathrm{Im}(g\circ f)$, z peut s'écrire $z=g\circ f(x)$ pour un x de E, ce qui s'écrit aussi $z=g(f(x))$ donc $z\in\mathrm{Im}\, g$.

■ Montrons que $\mathrm{Im}\, g\subseteq\mathrm{Im}(g\circ f)$ si $f\circ g=Id$: Supposons $f\circ g=Id$. Soit $z\in\mathrm{Im}\, g$, z peut s'écrire $z=g(x)$ pour un x de E. Or $x=f\circ g(x)$ puisque $f\circ g=Id$. On en déduit $z=g(f(g(x)))$ ce qui s'écrit aussi $z=g\circ f(g(x))$ donc $z\in\mathrm{Im}\, g\circ f$.

2) Montrer que $Ker(g\circ f)=Ker\, f$ [Méthode : Par double inclusion]

■ Montrons que $Ker\, f \subseteq ker(g\circ f)$ (C'est toujours vrai, on n'a pas besoin de l'hypothèse $f\circ g=Id$.):
Soit $x\in Kerf$, on a $f(x)=0$ d'où $g\circ f(x)=g[f(x)]=g[0]=0$, donc $x\in Ker(g\circ f)$.

■ Montrons que $Ker(g\circ f)\subseteq Ker\, f$ si $f\circ g=Id$: Supposons $f\circ g=Id$. Soit $x\in Ker(g\circ f)$. Par définition, cela signifie que $g\circ f(x)=0$. En composant par f, on a $f(g\circ f(x))=f(0)=0.$ (*)
Or $f(g\circ f(x))=f\circ g\circ f(x)=Id\circ f(x)=f(x)$, donc (*) devient $f(x)=0$, c'est à dire $x\in Kerf$.

3) Montrer que $E=Ker\, f\oplus \mathrm{Im}\, g$.

Avec les résultats des questions précédentes, cette condition peut se réécrire $E=Ker(g\circ f)\oplus \mathrm{Im}(g\circ f)$.

■ Montrons que $Ker(g\circ f)\cap \mathrm{Im}(g\circ f)=\{0\}$:
Soit $y\in Ker(g\circ f)\cap \mathrm{Im}(g\circ f)$. Il existe un x de E tel que $y=g\circ f(x)$ puisque $y\in \mathrm{Im}(g\circ f)$. De plus, $g\circ f(y)=0$ puisque $y\in Ker(g\circ f)$. On a donc :
On a $0=g\circ f(y)=g\circ f(g\circ f(x))=g\circ f\circ g\circ f(x)=g\circ(f\circ g)\circ f(x)=g\circ Id\circ f(x)=g\circ f(x)=y$. On a donc montré que $y\in Ker(g\circ f)\cap \mathrm{Im}(g\circ f)\Rightarrow y=0$ c'est à dire $Ker(g\circ f)\cap \mathrm{Im}(g\circ f)=\{0\}$.

■ Montrons que $E=Ker(g\circ f)+\mathrm{Im}(g\circ f)$:
Soit $x\in E.$ $x=x-g\circ f(x)+g\circ f(x)$. Bien sûr, $g\circ f(x)\in \mathrm{Im}\, g\circ f$. Pour montrer que cette décomposition est de la forme souhaitée, il suffit donc de montrer que $x-g\circ f(x)\in Ker\, g\circ f$.
$g\circ f(x-g\circ f(x))=g\circ f(x)-g\circ f(g\circ f(x))=g\circ f(x)-g\circ f\circ g\circ f(x)=g\circ f(x)-g\circ Id\circ f(x)=0$, qui montre que $x-g\circ f(x)\in Ker\, g\circ f$.

4) Bonus (Hors barème) : Trouver un exemple de deux endomorphismes f et g tels que $f\circ g=Id$ et $g\circ f\neq Id$.

■ **Exemple 1, dans le monde des suites** :
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites réelles) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui décale les termes d'une suite d'un indice vers la gauche (u_0 est donc perdu et le terme d'indice 0 est celui qui avait pour indice 1 dans la suite initiale) et soit g la fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui décale les termes d'une suite d'un indice vers la droite en ajoutant un premier terme $u_0=0$ (le terme d'indice 1 est celui qui avait pour indice 0 dans la suite initiale).
Autrement dit :
La suite $u=(u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\dots)$ a pour image par f la suite
$f(u)=(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\dots)$;
La suite $u=(u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\dots)$ a pour image par g la suite
$g(u)=(0,\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\dots)$

f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

L'image d'une suite par $f\circ g$ est la suite elle-même donc $f\circ g=Id$.
Par contre, l'image d'une suite par $g\circ f$ est une suite dont tous les termes sont identiques à ceux de la suite initiale sauf peut-être le premier terme qui a été remplacé par 0. Une suite de premier terme différent de 0 (il en existe, prenez la suite constante égale à 2) n'a donc pas pour image elle-même donc $g\circ f\neq Id$.

[Attention ! Dans certaines copies je vois des exemples de fonctions telles que $f\circ g=Id$ et $g\circ f\neq Id$, mais elles ne sont pas linéaires et elles ne constituent donc pas des exemples pour cette question.]

■ **Exemple 2, dans le monde des polynômes** :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}[X]$ (l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe sa dérivée et soit g la fonction de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe l'unique polynôme de terme constant 0 et qui a pour dérivé le polynôme initial.

◊ Soit P un polynôme et soit Q le polynôme de terme constant 0 qui a pour dérivée P.
$f\circ g(P)=f(Q)=Q'=P$. Ceci étant vrai pour tout polynôme P, $f\circ g=Id$.

◊ $g\circ f(2X+1)=g(2)=2X\neq 2X+1$ donc $g\circ f\neq Id$.

Remarque pour ceux qui ont déjà vu les primitives en obligatoire : On aurait aussi pu définir g en disant que c'est la fonction de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe son unique primitive qui s'annule en zéro ou encore, pour ceux qui préfèrent le dire avec une formule, $g(P)\overset{\text{def}}{=}\int_0^x P(t)\,dt$.

Exercice 4

1) Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :
$f(1, 0, 0)=(2, 1)$; $f(1, 2, 1)=(-4, 15)$; et $f(1, 0, 1)=(2, 5)$.
Calculer $f(x, y, z)$.

[Méthode : Par conditions nécessaire et suffisante.]

■ **Condition nécessaire : Cherchons quelles conditions doit nécessairement satisfaire une fonction qui vérifie les conditions de l'énoncé.**

Supposons qu'il existe une fonction f qui vérifie les conditions de l'énoncé, c'est à dire une application linéaire f telle que $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $f\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\15\end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

Pour déterminer l'image par f de n'importe quel vecteur, il suffit ce connaître celles de $b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $b_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $b_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. En effet, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=x\,b_1+y\,b_2+z\,b_3$ et comme f est linéaire, $f(x,\ y,\ z)=f(x\,b_1+y\,b_2+z\,b_3)=x\,f(b_1)+y\,f(b_2)+z\,f(b_3)$.

◊ $f(b_1)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est donne dans l'énoncé.

◊ $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=2b_2$, d'où $2f(b_2)=f\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-2\\15-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix}$ et $f(b_2)=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

◊ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=b_3$, d'où $f(b_3)=f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2\\5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ et $f(b_3)=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.

Finalement, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\,f(b_1)+y\,f(b_2)+z\,f(b_3)=x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-3y\\x+5y+4z\end{pmatrix}$.

On a donc établi que si une fonction est solution, elle vérifie nécessairement $\boxed{f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-3y\\x+5y+4z\end{pmatrix}}$. Il y a donc au plus une fonction solution.

■ **Condition suffisante : Montrons que la fonction trouvée convient en effet.** (i.e. les conditions trouvées précédemment sont suffisantes pour que la fonction soit solution)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}2x-3y\\x+5y+4z\end{pmatrix}$. On vérifie facilement qu'elle est linéaire et qu'on a bien $f(1, 0, 0)=(2, 1)$; $f(1, 2, 1)=(-4, 15)$ et $f(1, 0, 1)=(2, 5)$. Elle est donc solution du problème.
Avec ce qui précède, on a donc montré que c'est l'unique solution.

2) Déterminer le noyau de f.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in Ker\,f \Leftrightarrow \begin{cases}2x-3y=0\\x+5y+4z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3}{2}y\\ \dfrac{3}{2}y+5y+4z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3}{2}y\\ z=\dfrac{-13}{8}y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\ \frac{-13}{8}\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $(x,\ y,\ z)\in Ker\,f \Leftrightarrow (x,\ y,\ z)$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}=\left(\frac{3}{2},\ 1,\ -\frac{13}{8}\right)$. $Ker\,f$ est donc formé de l'ensemble des vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{u}=\left(\frac{3}{2},\ 1,\ -\frac{13}{8}\right)$. Autrement dit, $Ker\,f$ est l'espace vectoriel engendré par le vecteur $\vec{u}=\left(\frac{3}{2},\ 1,\ -\frac{13}{8}\right)$, ce que l'on note $Ker=\mathbb{R}\vec{u}$.