D.S. n°2 : Probabilités (discrètes)	TS1

Jeudi 18 octobre 2012, 2 exercices **(TSVP)**, 1h, **Calculatrices autorisées**
Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : − ± + Technique : − ± + Raisonnement : − ± +	Note : $\frac{}{20}$

/6 **Exercice 1.**

On tire un jeton dans une urne contenant
- trois jetons rouges numérotés respectivement 1, 2 et 3 ;
- deux jetons bleus numérotés respectivement 1 et 2 ;
- un jeton vert portant le numéro 1.

On désigne respectivement par R, U et D les événements suivants :
- R : « Le jeton tiré est rouge » ;
- U : « Le jeton tiré porte le numéro 1 » ;
- D : « Le jeton tiré porte le numéro 2 ».

/2 **1)** Les événements R et U sont-ils indépendants ?

/2 **2)** Les événements R et D sont-ils indépendants ?

/2 **3)** Sans faire aucun calcul supplémentaire, déterminer si les événements R et $\bar{D}$ sont indépendants ou non.

/14 **Exercice 2.** *Sujet de bac*

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté. À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

/1,5 **1)** À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs?

2) On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :

- « $rand(1,50)$ » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle $[1;50]$.
- l'écriture « $x:=y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	*a, b, c, d, e sont des variables du type entier*
	Initialisation $a:=0; b:=0; c:=0; d:=0; e:=0$
Traitement	*Tant que* $(a=b)$ *ou* $(a=c)$ *ou* $(a=d)$ *ou* $(a=e)$ *ou* $(b=c)$ *ou* $(b=d)$ *ou* $(b=e)$ *ou* $(c=d)$ *ou* $(c=e)$ *ou* $(d=e)$ *Début du tant que* $a:=rand(1,50); b:=rand(1,50); c:=rand(1,50);$ $d:=rand(1,50); e:=rand(1,50)$ *Fin du tant que*
Sortie	*Afficher* a, b, c, d, e.

/1 **a)** Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme:
$L_1=\{2,11,44,2,15\}$; $L_2=\{8,17,41,34,6\}$; $L_3=\{12,17,23,17,50\}$; $L_4=\{45,19,43,21,18\}$?

/1 **b)** Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste?

/0,5 **3)** À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.

4) On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

/1,5 **a)** Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X? Préciser ses paramètres.

b) On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des événements suivants :

- il a été contrôlé 5 fois exactement;

/3,5 - il n'a pas été contrôlé;

- il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'événement : «le contrôle est positif», et d'après des statistiques, on admet que $P(T)=0,05$. On appelle D l'événement : «le coureur est dopé».

Le contrôle antidopage n'étant pas fiable à 100%, on sait que:

-si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97% des cas;

-si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1% des cas.

/2,5 **1)** Calculer $p(D)$.

/2,5 **2)** Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé?

Exercice 1.

<u>Remarque</u> : Pas besoin de faire un arbre pour calculer $P(U)$ quand on sait que trois jetons sur les six portent le numéro 1 !

1) Trois jetons sur les six sont rouges donc $P(R)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; Trois jetons sur les six portent le numéro 1 donc $P(U)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; un jeton sur les six est rouge ET porte le numéro 1 donc $P(R\cap U)=\frac{1}{6}$.

$\frac{1}{6}\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ donc $P(R\cap U)\neq P(R)\times P(U)$, <u>les événements R et U ne sont donc PAS indépendants</u>.

<u>Autre méthode</u> : Trois jetons sur les 6 portent le numéro 1 donc $P(U)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; Un jeton sur les trois jetons <u>rouges</u> porte le numéro 1 donc $P_R(U)=\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}$ donc $P(U)\neq P_R(U)$, <u>les événements R et U ne sont donc PAS indépendants</u>.

2) Deux jetons sur les six portent le numéro 2 donc $P(D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; un jeton sur les six est rouge ET porte le numéro 2 donc $P(R\cap D)=\frac{1}{6}$.

$P(R)\times P(D)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=P(R\cap D)$, <u>les événements R et D sont donc indépendants</u>.

<u>Autre méthode</u> : Deux jetons sur les six portent le numéro 2 donc $P(D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; Un jeton sur les trois jetons <u>rouges</u> porte le numéro 2 donc $P_R(D)=\frac{1}{3}$, d'où $P(D)=P_R(D)$, <u>les événements R et D sont donc indépendants</u>.

<u>Remarque</u> : Une seule des deux égalités $P(D)=P_R(D)$ et $P(R)=P_D(R)$ suffit à prouver l'indépendance : Pas besoin de prouver les deux !

3) D'après le cours R et $\bar{D}$ sont indépendants ssi R et D sont indépendants. Or d'après la question 2, R et D sont indépendants donc les <u>événements R et $\bar{D}$ sont indépendants</u>.

Exercice 2. *Sujet de Bac S, Pondichéry Juin 2012*

Partie A

1) Le nombre de groupes différents de 5 coureurs est encore le nombre de tirages simultanés de 5 numéros de dossards parmi 50 numéros. Ce nombre est

$$\binom{50}{5} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 49 \times 2 \times 47 \times 46 = 2\,118\,760.$$

2) (a) L'algorithme démarre avec 5 nombres égaux à 0 puis, tant que les 5 nombres ne sont pas deux à deux distincts, il génère 5 nombres au hasard entre 1 et 50. L'algorithme s'arrête quand les 5 nombres générés sont deux à deux distincts. Par suite, l'algorithme peut fournir les ensembles L_2 et L_4 mais pas les ensembles L_1 et L_3.

(b) L'algorithme permet de tirer au sort 5 coureurs parmi les 50 pour subir un contrôle anti-dopage.

3) Il y a 50 choix possibles de 1 coureur parmi 50 et 5 choix de 1 coureur parmi les 5 qui subissent un contrôle. La probabilité qu'un coureur subisse un contrôle est donc

$$p = \frac{5}{50} = 0,1.$$

4) (a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le coureur subit un contrôle » avec une probabilité $p = 0,1$ ou « le coureur ne subit pas de contrôle » avec une probabilité $1 - p = 0,9$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k}(0,1)^k(0,9)^{10-k}.$$

(b) • $p(X = 5) = \binom{10}{5}(0,1)^5(0,9)^5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}(0,09)^5 = 3 \times 2 \times 7 \times 6 \times (0,09)^5 = 0,0015$ arrondie au dix millième.

$\boxed{\text{La probabilité que le coureur soit contrôlé 5 fois exactement est } 0,0015 \text{ arrondie au dix millième.}}$

• $p(X = 0) = \binom{10}{0}(0,1)^0(0,9)^{10} = (0,9)^{10} = 0,3487$ arrondie au dix millième.

$\boxed{\text{La probabilité que le coureur ne soit pas contrôlé est } 0,3487 \text{ arrondie au dix millième.}}$

• $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (0,9)^{10} = 0,6513$ arrondie au dix millième.

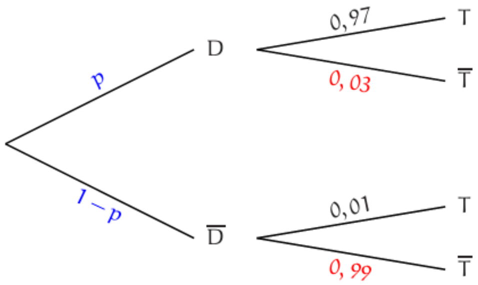
$\boxed{\text{La probabilité que le coureur soit contrôlé au moins une fois est } 0,6513 \text{ arrondie au dix millième.}}$

Remarques :

- Quand on vous demande la loi d'une variable aléatoire soit on répond par un tableau, soit, et c'est toujours le cas quand on a une loi binomiale, par une formule qui permet de remplir le tableau. Bref, dans le cas d'une loi binomiale, ne perdez pas votre temps à remplir le tableau !
- Si on vous demande des résultats arrondis au dix-millième c'est, aussi incroyable que cela puisse vous apparaître, qu'on veut des résultats arrondis au dix-millième. Par contre dans la partie B, quand on demande des résultats sous forme de fractions irréductibles, c'est qu'on veut des résultats sous forme de fractions irréductibles. Dans tous les cas obtempérez !
- Les probabilités supérieures à 1 ou négatives sont passibles d'un zéro à la question concernée.

Partie B

1) L'énoncé fournit $p(T) = 0,05$, $p_D(T) = 0,97$ et $p_{\overline{D}}(T) = 0,01$. Posons $p(D) = p$. Représentons la situation par un arbre :



La formule des probabilités totales fournit :

$$p(T) = p\left(D \cap T\right) + p\left(\overline{D} \cap T\right) = p(D) \times p_D(T) + p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(T),$$

et donc $0,97p + 0,01(1-p) = 0,05$ puis $0,96p = 0,04$ et finalement

$$p(D) = \frac{0,04}{0,96} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}.$$

$$\boxed{p(D) = \frac{1}{24}.}$$

2) La probabilité demandée est $p_T\left(\overline{D}\right)$.

$$p_T\left(\overline{D}\right) = \frac{p(T \cap \overline{D})}{p(T)} = \frac{p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(T)}{p(T)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{24}\right) \times \frac{1}{100}}{\frac{5}{100}} = \frac{23}{24} \times \frac{1}{100} \times \frac{100}{5} = \frac{23}{120}.$$

$$\boxed{p_T\left(\overline{D}\right) = \frac{23}{120}.}$$