D.S. n°2 : Suites et Probabilités conditionnelles	TS1

Vendredi 16 novembre 2013, 1h50, **Calculatrices autorisées**. *Ce sujet est à rendre avec la copie.*

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Note : $\overline{\quad}$ 20

/13,75

Exercice 1. *Mentir pour réussir ?* Maths'x 58 p390

Avant le baccalauréat, on estime que les trois quarts des candidats révisent, et qu'un candidat a neuf chances sur dix d'être admis s'il a révisé, et seulement deux chances sur dix s'il n'a pas révisé.
Après le baccalauréat, tous les reçus font les fiers en prétendant qu'ils n'avaient pas révisé et tous les refusés crient à l'injutice et affirment avoir travaillé jour et nuit. On admet que les autres ne mentent pas au sujet des révisions effectuées (ou non!).

/7

Partie I. Quand on choisit un candidat au hasard

Après l'examen, on choisit un candidat au hasard. Soient A, R et M respectivement les événements « Le candidat est admis », « Le candidat a révisé » et « Le candidat est un menteur ».

1) Calculer la probabilité que ce candidat :

- **a)** soit admis et ait révisé.
- **b)** soit admis.
- **c)** soit refusé et mente au sujet de ses révisions.
- **d)** mente au sujet de ses révisions.

2) Les événements A et M sont-ils indépendants ?

3) Vous rencontrez par hasard dans la rue Hassan qui n'a pas eu le baccalauréat. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas révisé ?

4) Vous rencontrez par hasard dans la rue un candidat qui a réussi l'examen. Quelle est la probabilité qu'il ait menti à ses camarades?

5) Vous rencontrez par hasard dans la rue un candidat qui vous avoue avoir menti à ses camarades. Quelle est la probabilité qu'il ait eu le baccalauréat ?

6) Vous rencontrez par hasard dans la rue un candidat qui n'a pas menti à ses camarades. Quelle est la probabilité qu'il ait eu le baccalauréat ? Peut-on dire que mentir augmente les chances d'être reçu ?

/1,75

Partie II. Quand on choisit au hasard 7 candidats.

Après l'examen, on choisit au hasard 7 candidats.

7) Quelle est la probabilité qu'exactement 6 de ces candidats soient des menteurs ?

8) Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces candidats soient des menteurs ?

/5

Partie III. Quand on choisit au hasard *n* candidats, étude d'une suite.

Après l'examen, on selectionne au hasard un groupe de n candidats. Soit L_n l'événement « *Il y a au moins un menteur dans le groupe* » (L comme « Liar » qui veut dire « menteur » en anglais). On note u_n la probabilité de L_n.

9) Étude de la suite (u_n) .

- **a)** Montrez que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $u_n = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n$.
- **b)** Déterminer le sens de variation de (u_n) .
- **c)** Déterminer la limite de (u_n) .

10) Étude d'un algorithme.

Saisir un nombre p avec $0<p<1$.
n prend la valeur 0
U prend la valeur 0
Tant que $U<p$ faire
n prend la valeur $n+1$
U prend la valeur $1-\frac{1}{8^n}$.
Fin du Tant Que
Afficher n

a) Faire fonctionner cet algorithme lorsque $p=0{,}999=99{,}9\%$ *On complétera le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs à 0,0001 près et on entourera la/les valeur(s) affichée(s).*

b) Pourquoi est-on sûr quand on rentre $p=99{,}9\%$ que la boucle va s'arrêter au bout d'un certain nombre d'itérations ?

c) Compléter, directement sur l'énoncé, la phrase suivante, sans justification :

«Cet algorithme sert à déterminer le nombre (maximum? minimum?)[1] .... d'éleves à selectionner parmi ceux qui viennent d'avoir leurs résultats au baccalauréat pour que la probabilité qu'il y ait au moins un menteur dans le groupe atteigne ou .... (devienne supérieur à ? devienne inférieur à ?) la valeur ..... pour la premiere fois. ».

Tableau à compléter : Certaines colonnes peuvent rester vides.

n	0						
U	0						
Test U<p							

<u>Avis aux redoublants</u> : A ce stade de l'année, nous n'avons pas étudié les logarithmes, vous ne pouvez donc pas les utiliser.

/6,25

Exercice 2.

L'objectif de cet exercice est de calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_1=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$ pour tout entier naturel non nul n .

1) Calculer les termes u_2, u_3 et u_4.

2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n>0$.

3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.

5) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n}$. En déduire que $\ell=\frac{1}{2}\ell$ puis la valeur de ℓ.

On définit la suite (v_n) par $v_n=\frac{u_n}{n}$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

6) Montrer que (v_n) est une suite géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

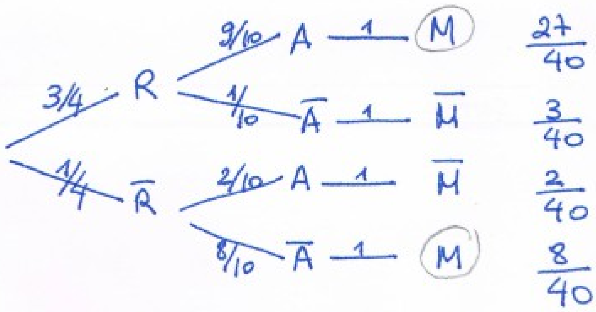
7) En déduire que $u_n=\frac{n}{2^n}$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

8) Conclure quant à la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$.

[1] *Choisir un des mots proposés.*

Brouillon de correction

I



Groupe de 40

menteurs

	R	$\bar{R}$	Tot
A	27	2	29
$\bar{A}$	3	8	11
TOT	30	10	40

1 – 1a) $P(A\cap R) = P(R)\times P_R(A) = \frac{3}{4}\times\frac{9}{10} = \frac{27}{40} = 0,675$ ⚠ $P(A\cap R) \neq P_R(A)$

1 – b) $P(A) = \frac{27}{40} + \frac{2}{40} = \frac{29}{40} = 0,725$

1 – c) $P(\bar{A}\cap M) = P(\bar{A}\cap\bar{R}) = \frac{1}{4}\times\frac{8}{10} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0,2$

1 – d) $P(M) = P(M\cap A) + P(M\cap\bar{A}) = P(R\cap A) + P(\bar{R}\cap\bar{A}) = \frac{27}{40} + \frac{8}{40} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8} = 0,875$

1 2) $P(A\cap M) = P(A\cap R) = \frac{27}{40} = \frac{27\times 8}{40\times 8} = \frac{216}{320} = 0,675$ démarche 0,5 | chaque calcul 0+

$P(A) = \frac{29}{40}$, $P(M) = \frac{7}{8}$ $\Big\}$ $P(A)\times P(M) = \frac{29}{40}\times\frac{7}{8} = \frac{203}{320} = 0,634$

$P(A\cap M) \neq P(A)\times P(M)$ pas indépendants.

1 – 3) $P_{\bar{A}}(\bar{R}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{R})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{8}{40}}{\frac{11}{40}} = \frac{8}{11} \approx 0,727$ C : on sait que Hassan n'a pas eu le bac.

1 – 4) $P_A(M) = \frac{P(A\cap M)}{P(A)} = \frac{\frac{27}{40}}{\frac{29}{40}} = \frac{27}{29} \approx 0,931$

1 – 5) $P_M(A) = \frac{P(A\cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{27}{40}}{\frac{35}{40}} = \frac{27}{35} \approx 0,771$

1 – 6) $P_{\bar{M}}(A) = \frac{P(A\cap\bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{P(A\cap\bar{R})}{P(\bar{M})} = \frac{\frac{2}{40}}{\frac{5}{40}} = \frac{2}{5} = \frac{14}{35} \approx 0,40$

0,5 $P_M(A) = \frac{27}{35} > \frac{14}{35} = P_{\bar{M}}(A)$
mais mentir pas la cause du succès puisque cela se décide après les résultats.

II 7) on choisit 7 candidats. avec $p = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}$
1 – choix 1 candidat = épreuve de Bernoulli, succès = menteur
répétitions indépend → loi binomiale
X compte succès

0,5 $P(X=6) = \binom{7}{6}\left(\frac{7}{8}\right)^6\left(\frac{1}{8}\right)^1 = 7\times\left(\frac{7}{8}\right)^6\times\frac{1}{8} = \left(\frac{7}{8}\right)^7 \simeq 39,3\% = 0,3927$

8) $P(X\geqslant 6) = P(X=6) + P(X=7)$
$= \left(\frac{7}{8}\right)^7 + \binom{7}{7}\left(\frac{7}{8}\right)^7\left(\frac{1}{8}\right)^0 = 2\times\left(\frac{7}{8}\right)^7 \simeq 78,54\% = 0,7854$

III 9) a) Loi binomiale, X_n compte # menteurs

$P(L_n) = P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n$

b) $n \mapsto \left(\frac{1}{8}\right)^n$ suite geom avec $0 < q < 1$ donc ↘

ou $\frac{1}{8} < 1 \Rightarrow \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^n \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n \Rightarrow -\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} \geq -\left(\frac{1}{8}\right)^n$

$\Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} \geq 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n$ ie $U_{n+1} \geq U_n$ $\boxed{u \nearrow}$

c) $0 < \frac{1}{8} < 1$ donc d'après cours lim suite geom $\lim \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$

d'où $\boxed{\lim U_n = 1}$

10 a)

10 b) $\lim U_n = 1$ donc à part d'1 certain rg tous les te de la su ds $]0{,}999 ; 1{,}5[$ intervalle ouvert contenant 1 (déf de la l d'1 suite conv)

10) Étude d'un algorithme.

```
Saisir un nombre p avec 0<p<1.
n prend la valeur 0
U prend la valeur 0
Tant que U<p faire
    n prend la valeur n+1
    U prend la valeur 1-1/8^n.
Fin du Tant Que
Afficher n
```

1,5 **a)** Faire fonctionner cet algorithme lorsque $p = 0{,}999 = 99{,}9\,\%$ *On complétera le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs à 0,0001 près et on entourera la/les valeur(s) affichée(s).*

1 **b)** Pourquoi est-on sûr quand on rentre $p = 99{,}9\,\%$ que la boucle va s'arrêter au bout d'un certain nombre d'itérations ?

c) Compléter, directement sur l'énoncé, la phrase suivante, sans justification :

1 *«Cet algorithme sert à déterminer le nombre (maximum? minimum?)* minimum ...... *d'élèves à sélectionner parmi ceux qui viennent d'avoir leurs résultats au baccalauréat pour que la probabilité qu'il y ait au moins un menteur dans le groupe atteigne ou .... (devienne supérieur à ? devienne inférieur à ?) la valeur* p *. pour la premiere fois. ».*

Tableau à compléter : Certaines colonnes peuvent rester vides.

n	0	1	2	3	4		
U	0	0,875	0,9844	0,9981	0,9998		
Test $U<p$	V	V	V	V	F		