

D.S. de mathématiques n°3 : Suites arithmétiques et géométriques, Fonctions de référence	1^{ère} S
---	--------------------------

Vendredi 6 janvier 2012, 55 minutes, Calculatrices autorisées

Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom :	Note : <u>20</u>
Prénom :	

	A ☺	ECA ☹	NA ☹
Compréhension des consignes, capacité à extraire et organiser l'information utile :			
Réalisation: Maîtrise des techniques mathématique : Techniques de calcul, connaissance du cours (vocabulaire, propriétés) et maîtrise des savoir-faire du chapitre.			
Raisonnement : Raisonnement logique, utilisation d'une démarche adéquate, pas d'incohérences.			
Communication : Présenter clairement la démarche suivie et les résultats obtenus; Utiliser correctement les notations mathématiques.			
Soin : Propreté de la copie, écriture soignée, orthographe ...			
Gestion du temps, rapidité d'exécution (liée à l'acquisition d'automatismes)			

A : Acquis ; ECA : En Cours d'Acquisition ; NA : Non Acquis

/3	Exercice 1. Manipulation réfléchie d'inégalités
-----------	--

Donner un encadrement de $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{2+x^2}}$ sur $[-3; -1]$. Justifier le passage d'une inégalité à l'autre.

/3	Exercice 2. Techniques de calcul
-----------	---

Prouvez que la suite de terme général $u_n = \frac{4^{2n+1}}{6^{n-2}}$ est géométrique et précisez sa raison.

/6	Exercice 3
-----------	-------------------

A la suite d'un héritage, Maëlis dispose d'une somme de 65 000 € qu'elle désire faire fructifier. La banque lui propose deux placements :

Placement A (à intérêts simples) : Le capital augmente chaque année de 3 500 €;

Placement B (à intérêts composés) : Le capital augmente chaque année de 4,5% du capital de l'année précédente.

On note u_n le capital acquis à la fin de la n-ième année de placement avec le placement A et v_n le capital acquis à la fin de la n-ième année de placement avec le placement B.

- /4** 1) Exprimer u_n et v_n en fonction de n . Justifier.
- /2** 2) A l'aide de la calculatrice, déterminer le placement le plus intéressant pour Maëlis suivant l'année où elle retire son capital. Expliquer.

/4	Exercice 4
-----------	-------------------

Un atelier envisage de produire 150 articles au mois de janvier 2012 et d'augmenter sa production de 5 unités par mois. Si ces prévisions se réalisent, combien aura-t-il produit d'articles en 2012 ?

/4	Exercice 5
-----------	-------------------

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -(x+1)^2 + 4$ et soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Déterminer les variations de f puis celles de g sur leurs domaines de définition respectifs. Justifier.

Exercice 1. Manipulation réfléchie d'inégalités

$-3 \leq x \leq -1$
 $\Rightarrow 9 \geq x^2 \geq 1$ car -3 et -1 sont négatifs et $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$;
 $\Rightarrow 11 \geq x^2 + 2 \geq 3$
 $\Rightarrow \sqrt{11} \geq \sqrt{x^2 + 2} \geq \sqrt{3}$ car 3 et 11 sont positifs et $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0; +\infty[$;
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{11}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ car $\sqrt{3}$ et $\sqrt{11}$ sont positifs et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[0; +\infty[$;
 $\Rightarrow \frac{-4}{\sqrt{11}} \geq \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 2}} \geq \frac{-4}{\sqrt{3}}$ car multiplier par un nombre négatif retourne les inégalités.

L'encadrement cherché est : Pour tout $x \in [-3; -1]$, $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{2+x^2}} \in \left[\frac{-4}{\sqrt{3}}; -\frac{4}{\sqrt{11}} \right]$.

Exercice 2. Techniques de calcul

$u_n = \frac{4^{2n+1}}{6^{n-2}} = \frac{4^{2n} \times 4}{6^n \times 6^{-2}} = \frac{16^n \times 4}{6^n \times 6^{-2}} = \left(\frac{16}{6}\right)^n \times \frac{4}{6^{-2}} = \left(\frac{8}{3}\right)^n \times 4 \times 36 = 144 \times \left(\frac{8}{3}\right)^n$. u_n est donc de la forme $u_n = \lambda \times q^n$ avec $q = \frac{8}{3}$ donc (u_n) est géométrique de raison $\frac{8}{3}$.

Exercice 3

1) *Placement A (à intérêts simples)* : Le capital augmente chaque année de 3 500 € donc (u_n) est arithmétique de raison $r = 3500$, d'où $u_n = 65000 + 3500n$.

Placement B (à intérêts composés) : Le capital augmente chaque année de 4,5% du capital de l'année précédente donc (v_n) est géométrique de raison $q = 1 + \frac{4,5}{100} = 1,045$ d'où $v_n = 65000 \times (1,045)^n$.

2) Pour $n \leq 8$, $u_n > v_n$ avec $u_8 = 93000$ et $v_8 \approx 92437$. Pour $n \geq 9$, $u_n < v_n$ avec $u_9 = 96500$ et $v_9 \approx 96596$. Si Maëlis fait fructifier son argent au moins 9 ans, il vaut mieux qu'elle choisisse le placement B. Si par contre elle compte retirer son argent avant 9 ans, il vaut mieux qu'elle choisisse le placement A.

Exercice 4

Soit u_n la quantité d'articles produits le mois n , janvier étant le mois numéro 1, février le mois numéro 2 ...etc. Si la production augmente de 5 unités par mois, (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$, d'où $u_n = u_1 + (n-1)r = 150 + (n-1) \times 5$.

La quantité totale produite en 2012 est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, elle sera donc $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{12} = 150 + 155 + 160 + \dots + 205 = \frac{12 \times (150 + 205)}{2} = 2130$ articles.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -(x+1)^2 + 4$. f est un trinôme du second degré donné sous forme canonique. On lit sur cette expression que son sommet a pour coordonnées $(-1; 4)$. f est un trinôme du second degré, elle est donc du signe de $a = -1 < 0$ à l'extérieur de ses racines. On obtient les racines par le calcul suivant :

$$f(x) = -(x+1)^2 + 4 = 4 - (x+1)^2 = (2-x-1)(2+x+1) = (1-x)(3+x)$$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f(x)$		\nearrow	\searrow		
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	\searrow	\searrow	\nearrow	\nearrow	

f et $g = \frac{1}{f}$ ont des variations opposées sur tout intervalle sur lequel f est strictement négative ou strictement positive.

On applique ce résultat sur $]-\infty; -3[$, puis sur $]-3; -1[$ puis sur $]-1; 1[$, puis sur $]-\infty; -3[$, puis sur $]1; +\infty[$ et on obtient le tableau de variations de g .

